ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS XVIII/11.

Szerkeszti: Budai László

951-964

MATEMATIKA

EGER, HUNGARIA

1987.

ACTA ACADEMIAE PEDAGOGICAE AGRIENSIS XVIII/11.

Szerkesztő -- Redigit:
BUDAI LÁSZLÓ

Felelős kiadó:
SZŰCS LÁSZLÓ

H. MOLNÁR SÁNDOR*

LINEÁRIS REKUZÍV SOROZATOK EGY ELOSZLÁSI TULAJDONSÁGÁRÓL

Abstract: (On a distribution property of linear reccurences)

Let $G=\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recurrence of real numbers defined by the recursion $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ for $n\geq 2$, where A and B are non-zero real numbers and the initial terms G_0, $G_1(\neq 0)$ are given. The distribution properties of these sequences have been studied by several authors. For example Tichy showed that there are infinitely many sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval but they not uniformly distributed. However the characteristic plynomials of the sequences in Tichy's construction have positive discriminants. In present paper we extend this result for sequences having negative discriminants furthermore we give the asymptotic distribution functions, too.

----

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273. sz. pályázata támogatta.

Legyen $G=\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendű lineáris rekuziv sorozat definiálva a

(1) $$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad n\geq 2$$

formulával, ahol A és B zérustól különböző valós számok, és a G_0, G_1 $(\neq 0)$ kezdőértékek szintén valós számok. A G sorozat

$$f(x)=x^2-Ax-B$$

karakterisztikus polinomjának a $D=A^2+4B$ diszkriminánsát egyidejűleg a G sorozat diszkriminánsának is nevezzük. Ismeretes, hogy ha a karakterisztikus polinomnak két különböző zérushelye van -- amit α -val és β -val jelölünk --, akkor G_n explicit alakja

(2) $$G_n = a\,\alpha^n + b\,\beta^n \qquad (n\geq 0)$$

ahol

(3) $$a = \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \qquad \text{és} \qquad b = -\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}$$

A (2) egyenletet Binet formulának nevezzük. $A=B=G_1=1$, $G_0=0$ esetén a G sorozat az ismert Fibonacci sorozattal azonos, amit F-el jelölünk. Az (1) sorozat nemdegenerált, ha α/β nem egységgyök.

Dolgozatunkban másodrendű lineáris rekurzív sorozatok modulo 1 eloszlásával foglalkozunk, így szükségünk lesz néhány további alapveztő fogalomra is.

Az $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének az

$$F: \left[0,1\right] \longrightarrow R, x \longrightarrow F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}\left(\left\{x_n\right\}\right)$$

függvényt nevezzük, ahol 1_I az I intervallum karakterisztikus függvényét, míg az $\{x\} = x - [x]$ az x valós szám törtrészét jelöli, tehát $1_{[0,x[}(\{x_n\})$ értéke 1 ha $\{x_n\} \in [0,x[$, és zérus, ha $\{x_n\} \notin [0,x[$.

Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha $F(x)=x \quad (0 \le x \le 1)$ teljesül.

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat mod 1 egyenletes eloszlású legyen, az hogy a

$$\Delta_N(x_n) = \sup_{0 \le x \le 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}(\{x_n\}) - x \right|$$

discrepancia zérushoz konvergáljon, ha $N \to \infty$. (ld.pl. L. KUIPERS és H. NIEDERREITER (1974).)

H.WEYL (1916), közismert dolgozatában bizonyította, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású mod 1, ha

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{4}$$

teljesül minden olyan valós változós, valós vagy komplex értékű folytonos f függvényre, melynek periodusa 1. Minthogy az összes folytonos 1 periódusú függvény egyenletesen approximálható trigonometrikus polinomokkal, ebből következik a Weyl kritérium: Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \tag{5}$$

minden $h \ne 0$ egész számra igaz.

A mod 1 eloszlással kapcsolatos alapvető eredmények megtalálhatók a L. KUIPERS és H. NIEDERREITER (1974) és E. HLAWKA (1979) monográfiákban.

Lineáris rekurzív sorozatokkal kapcsolatosan felvetődő eloszlási problémákat már számos szerző tanulmányozott. Példaként csak a témánkhoz szorosan kapcsolódó dolgozatok közül említünk néhányat.

R.L. DUNCAN (1967) és L. KUIPERS (1969) a $\left(\log_{10} F_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozatról megmutatták, hogy mod 1 egyenletes eloszlású, ahol F_n a Fibonacci sorozat n-dik elemét jelöli. Eredményüket L. KUIPERS 1982-ben általánosította tetszőleges $b > 1$, $b \in N$ alapú logaritmusra.

M.B. GREGORI és J. M. METZGER 1978-ban a $\lim_{n \to \infty} \sin\left(G_n x \Pi\right)$ határértéket vizsgálták, ahol G_n Fibonacci típusu sorozat, vagyis A=B=1, és x egy tetszőleges valós szám. Bizonyították, hogy a határérték akkor és csak akkor létezik, ha x eleme a $Q(\sqrt{5})$ egy -- általuk meghatározott -- H részhalmazának. Eredményüket H. MOLNÁR SÁNDOR 1983-ban általánosította az $A, G_0, G_1 \in Z$ és B=1 esetre, majd 1984-ben módszert adott a határérték meghatározására és azon $x \in R$ számok megkeresésére, melyekkel a határérték létezik, abban az esetben, ha a karakterisztikus polinom egyik zérushelye P.V. szám. (Az $\alpha \in R$ algebrai egész számot Pisot-Viyayaraghavan féle számnak -- P.V. számnak -- nevezzük, ha $\alpha > 1$ és összes α -tól különböző konjugáltjainak abszolut értéke egynél kisebb.)

KISS PÉTER és R.F.TICHY (megjelenés alatt), a G_{n+1}/G_n sorozat mod 1 asszimptotikus eloszlásfüggvényét állították elő negatív diszkirinánsú G sorozatokra.

-M.B.LEVIN és I.E. SPARLINSZKIJ 1979-ben konstruáltak olyan paramétereket, melyekkel képezett G sorozat egyenletes eloszlású mod 1.

KISS PÉTER és H.MOLNÁR SÁNDOR (1982), kontinuum sok olyan $x \in R$ és $y \in R$ számot adtak meg, melyekkel egy G egészelemű lineáris rekuzív sorozatból képezett $\{x \cdot G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban, de nem egyenletes eloszlású, illeltve az $\{y \cdot G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak mod 1 végtelen sok torlódási pontja van, de nem mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban. Az említett dolgozatban a szerzők feltételezik, hogy a karakterisztikus polinom egyik zérushelye P.V. szám. R.F.TICHY megjelenés alatt levő dolgozatában végtelen sok valósértékű másodrendű G sorozatot ad meg, melyek mod 1 nem egyenletes eloszlásúak, de a $[0,1[$ intervallumban mindenütt sűrűek.

KISS P. és H. MOLNÁR S. (1982) M.B LEVIN és I.E. SPARLINSZKI (1979) és R.F. TICHY megjelenés alatt lévő dolgozataiban közös, hogy a karakterisztikus polinomok zérushelyei valós számok. Most megmutatjuk, hogy végtelen sok olyan valósértékű G másodrendű lináris rekuzív sorozat létezik negatív diszkriminánssal is, melyekre $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ -ben, de nem egyenletes eloszlású ott. Bizonyításunk konstruktív és a modulo 1 aszimptotikus eloszlás függvényt is előállítjuk.

Ha $D=A^2+4B<0$, akkor (2)-ben α, β valamint a, b komplex konjugált számok, s így α, β, a és b felírhatók

(6) $$\alpha = r\, e^{i2\pi\theta} \quad , \quad \beta = r\, e^{-i2\pi\theta}$$

és

(7) $$a = \frac{1}{2} r_1 e^{i2\pi\omega} \quad , \quad b = \frac{1}{2} r_1 e^{-i2\pi\omega}$$

alakban is, ahol

$$\Theta = \frac{1}{2\Pi} \text{ arctg } \frac{\sqrt{-D}}{A} ,$$

$$\omega = \frac{1}{2\Pi} \text{ arctg } \frac{A\,G_0 - 2\,G_1}{G_0 \sqrt{-D}}$$

és r, r_1 pozitív számok. $r_1 \neq 0$ mert $D<0$, továbbá feltehető, hogy

$$0<\Theta,\ \omega < \frac{1}{2} .$$

Így (2) és (3) alapján

$$G_n = \frac{1}{2} r_1 r^n e^{i2\pi(\omega+n\Theta)} + \frac{1}{2} r_1 r^n e^{-i2\pi(\omega+n\Theta)} =$$

(8)

$$= r_1 r^n \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)$$

adódik

Érvényes a következő:

<u>1. TÉTEL:</u> Legyen A egy valós szám, melyre $-2 < A < 2$ és

$$\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos (A/2)$$

irracionális. Legyen $B=-1$, $G_1 \neq 0$; $G_0, G_1 \in R$ és

$$G_n = A\,G_{n-1} + B\,G_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2) .$$

Ha $r_1 = 2\ |a| \geq 2$ egész szám, akkor $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0,1[$ intervallumban.

A következő tétel megfogalmazásához néhány jelölést vezetünk be. Legyen n egy egész szám,

$$K_n = \begin{cases} n \text{ ha } n \geq 0 \\ \max\left\{ n, -r_1 \right\} \text{ ha } n<0 \end{cases}$$

és legyen

$$L_n(x) = \begin{cases} \min\left\{n+x,\ r_1\right\} & \text{ha } n\geq 0 \\ \max\left\{n+x, -r_1\right\} & \text{ha } n<0 \end{cases}$$

Ezen jelölések alkalmazásával bizonyítjuk a következőt.

2. TÉTEL: Legyen A egy valós szám, melyre

$-2 < A < 2$ és $\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos (A/2)$ irracionális.

Legyen $B=-1$, $G_1 \neq 0$ és $G_0, G_1 \in R$. Ekkor a

$$G_n = A\, G_{n-1} + B\, G_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2)$$

lineáris rekuzív sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye

$$F:[0,1] \longrightarrow R, x \longrightarrow F(x) = \frac{1}{\Pi} \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right) - \arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right)\right).$$

Következmény: Kontinuum sok valósértékű lineáris rekurzív sorozat van negatív diszkriminánssal, amely modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0,1[$ intervallumban.

Az 1. Tétel bizonyítása.

Legyen $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ a tétel feltételeit kielégítő sorozat. (8) alapján

(9) $\quad G_n = r_1 r^n \cos 2\Pi(\omega + n\Theta)$,

ahol

$$r = |\alpha| = \left| \frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2} \right| = \left| \frac{A+i\sqrt{4-A^2}}{2} \right| = 1 .$$

Ezt figyelembe véve a (9)-ből

(10) $G_n = r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)$

adódik.

Legyen $c \in [0,1[$. Mivel $r_1 \geq 2$ létezik olyan $d \in [0,1[$, hogy

$$\cos 2\Pi\, d = \frac{c}{r_1} .$$

A Θ irracionális szám, ezért mint ismeretes az

$$\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$$

sorozat egyenletes eloszlású mod 1. Ekkor viszont mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban, s így ki lehet választani olyan $\left(\omega+n_j\Theta\right)_{j=0}^{\infty}$ részsorozatotát, mely mod 1 konvergál d-hez. De akkor a

$$\left(G_{n_j}\right)_{j=0}^{\infty} = \left(r_1 \cos 2\Pi\left(\omega+n_j\Theta\right)\right)_{j=0}^{\infty}$$

konvergál a tetszőlegesen választott $c \in [0,1[$ számhoz, amiért is a c számnak tetszőleges pozitív környezetében van a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak eleme, tehát $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ mindenütt sűrű $[0,1[$ -ben. De akkor mod 1 is sűrű.

Bizonyítjuk azonban, hogy nem egyenletes eloszlású. Ehhez felhasználjuk a Weyl kritériumot. Mivel Θ irracionális, ezért $\left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású mod 1, s így a (4) relációt alkalmazhatjuk az

$$f(x) = e^{2\pi i h r_1 \cos 2\pi x}$$

-re és így (5)-ből

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h G_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h r_1 \cos 2\pi(\omega+n\Theta)} =$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i h r_1 \cos 2\pi x} dx$$

adódik.

De $h \neq 0$ esetén könnyen belátható, hogy

$$\int_0^1 e^{2\pi i h \cos 2\pi x} dx = I_0\left(4 \Pi h r_1\right) \neq 0 \quad ,$$

ezért a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right)_{n=0}^{\infty}$ nem egyenletes eloszlású mod 1.

A 2. Tétel bizonyítása

A $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének a $0 \le x \le 1$ helyen felvett értéke definició szerint:

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}(\{G_n\}) .$$

Használjuk G_n (10)-beli alakját. Így

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}\left(\left\{r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right\}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} 1_{[j,j+x[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} 1_{[j,j+x[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) + \right.$$

$$+ 1_{[[r_1],\min\{[r_1]+x,r_1\}[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) +$$

$$\left. + 1_{[-r_1,\max\{-r_1,[-r_1]+x\}[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 2\left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j+x}{r_1},\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j}{r_1}\right[}(\{\omega+n\Theta\}) + \right.$$

$$+ 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1}\right),\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{[r_1]}{r_1}\right)\right[}(\{\omega+n\Theta\}) +$$

$$\left. + 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1}\right),\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{[-r_1]}{r_1}\right)\right[}(\{\omega+n\Theta\})\right).$$

Minthogy Θ irracionális, ezért $\left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású mod 1, így

$$F(x) = \sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} \left(\frac{1}{\Pi}\arccos\frac{j}{r_1} - \frac{1}{\Pi}\arccos\frac{j+x}{r_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{[r_1]}{r_1}\right) - \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{-r_1}{r_1}\right) - \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1}\right) =$$

$$= \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\frac{1}{\Pi}\arccos\frac{k_j}{r_1} - \frac{1}{\Pi}\arccos\frac{L_j(x)}{r_1}\right) ,$$

s ez a 2. Tételt igazolja.

A következmény bizonyítása

A (3) és (7) relációkból

$$r_1 = \left| \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right| 2$$

következik.

Ha $G_0 = 0$, $G_1 = j\ |\alpha-\beta|$, ahol $j \geq 1$ egész szám, akkor $r_1 = 2j \geq 2$ egész szám lesz.

Nyilvánvalóan kontinuum sok $A \in R$ szám létezik a $-2 < A < 2$ és $\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos (A/2)$ irracionális feltételekkel, ezért az 1. Tétel feltételei kontinuum sok olyan G sorozatra teljesülnek, melynek diszkriminánsa: $D=A^2-4$ negatív, s ez a következményt igazolja.

FELHASZNÁLT IRODALOM

R.L. DUNCAN, An application of uniform destribution to the Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 5. (1967) 137-140.

M.B. GREGORY and J.M. METZGER, Fibonacci sine sequences, Fibonacci Quart., 16 (1978), 119-120.

E. HLAWKA, Theorie der Gleichverteilung, Bibl. Inst., Mannheim-Wien-Zurich, 1979.

P. KISS and S. MOLNÁR, On distribution of linear recurrences modulo 1, Studia Sci. Math. Hungar., 17 (1982), 113-127.

P. KISS and R.F. TICHY, Distribution of the ratios of the terms of a second order linear recurrence, Proc. Koninkl. Niederlandse Akad. Weten., A 89 (1968), 79-86.

L. KUIPERS, Remark on a paper by R.L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the logarithms of the Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 7 (1969), 465-466, 473.

L. KUIPERS, A property of the Fibonacci sequence F_m , m=0,1........ Fibonacci Quart., 20 (1982), 112-113.

M.B. LEVIN and I.E. SPARLINSKY, The uniform distribution of fractional part of recurrent sequences orosz nyelven, Usp.Mat.Nank., 34. (1979), No.3 (207), 203-204.

S.H. MOLNÁR, Sine sequence of second order linear recurrences, Period, Math.Hungar., 14 (1983), 259-267.

H. MOLNÁR SÁNDOR, Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak szinuszairól, Az Egri HSMTKF közleményei, XVII. (1984), 825-833.

L. KUIPERS and H.NIEDERREITER, Uniform distribution of linear recurrence sequences, megjelenés alatt.

H.WEYL, Über die Gelichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann. 77. (1916), 313-352.

KISS PÉTER

A LUCAS SZÁMOK PRIMOSZTÓIRÓL*

Abstract: **(On prime divisors of Lucas numbers)** Let R be a non-degenerate Lucas sequence defined by $R_n=A.R_{n-1}+B.R_{n-2}$ $(n > 1)$, where $R_0=0$, $R_1=1$ and A, B are fixed integers.

Donate by r(p) the rank of the apparition of a prime p in the sequence, that is $p \mid R_{r(p)}$ but $p \nmid R_m$ for $0 < m < r(p)$. It is known that if p is a prime with (p,B)=1, then r(p) exists, (i.e. there are terms divisible by p) and $r(p) \mid \left[p-(D/p)\right]$, where (D/p) is the Legendre-symbol and $D=A^2+4B$. In an earlier paper we proved that $\left[p-(D/p)\right]/r(p)$ is undbounded if p tends to infinity. Now we show: (i) for almost all primes p we have $\left[p-(D/p)\right]/r(p) > q\left[r(p)\right]$, where q(x) is a non decreasing arithmetical function with

$$q(n)/\log n \longrightarrow 0 \text{ if } n \longrightarrow \infty ;$$

(ii) for any δ with $0 < \delta < 1$ the set of primes p for which $\left[p-(D/p)\right]/r(p) > \delta . \log p$ $\left[\text{or } r(p) < p/(\delta.\log p)\right]$ has positive density in the set of all primes; (iii) the set of integers n, for which each primitive prime divisor of R_n is is greater than $\delta.n.\log n$ (where $0 < \delta < 1$), has positive density (p is a primitive prime divisor of R_n if r(p)=n).

---

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273. sz. pályázata támogatta.

Legyenek A és B rögzített zérustól különböző egész számok. Definiáljunk egy $R=\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az $R_0=0$, $R_1=1$ kezdő elemekkel és az

$$R_n = A\,R_{n-1}+B\,R_{n-2} \qquad (n > 1)$$

rekurzív formulával. Az R sorozatot A, B paraméterekkel megadott Lucas sorozatnak, tagjait pedig Lucas számoknak nevezzük. Jelöljük a sorozat

$$f(x)=x^2-Ax-B$$

definiáló polinomjának gyökeit α ill. β -val. Ha $D=A^2+4B\neq 0$ és α / β nem egységgyök, akkor a sorozatot nemdegeneráltnak nevezzük.

A továbbiakban feltesszük, hogy R nem degenerált sorozat, mert belátható, hogy a degenerált sorozatok leírhatók mértani, illetve bizonyos értelemben periodikus sorozatok segítségével. A Lucas sorozat A=B=1 speciális esetét Fibonacci sorozatnak nevezzük.

A Lucas, illetve a Fibonacci sorozatnak igen sok elemi tulajdonságát ismerjük, manapság is sokan foglalkoznak ezekkel a sorozatokkal. Néhány tulajdonságot, melyekre a későbbiek során szükségünk lesz, felsorolunk, a bizonyítások és további elemi tulajdonásgok megtalálhatók például D.H.Lehmer (1930) cikkében.

Ismert, hogy ha p egy primszám $p \nmid B$ feltétellel, akkor a sorozatban van p-vel osztható tag. Ezek közül a legkisebb indexű tag indexét r(p)-vel jelöljük és p előfordulási rendjének nevezzük.

Tehát $p \mid R_{r(p)}$, de $p \nmid R_i$, ha $0 < i < r(p)$.

Ha p egy primszám és valamely n esetén $p \mid R_n$, de $p \nmid R_m$ ha $0 < m < n$, akkor p-t az R_n tag egy primitív primosztójának nevezzük. Így p primitív primosztója az $R_{r(p)}$ tagnak.

$r(p)$ meghatározása általában igen nehéz. Azt azonban tudjuk, hogy ha $p \nmid BD$ akkor $r(p) \mid \left(p-(D/p)\right)$, ahol $D=A^2+4B$ és (D/p) a Legendre-szimbólum; továbbá $r(p)=p$ ha $p \mid D$. Ezek alapján felvetődik a kérdés, vajon

$$g(p) = \frac{p-(D/p)}{r(p)}$$

milyen egész értékeket vehet fel? D. JARDEN (1958) bizonyította, hogy a Fibonacci sorozat esetén $g(p)$ függvény nem korlátos, vagyis tetszés szerinti nagy számnál nagyobb értékeket is felvesz. Ezt az eredményt Bui Minh Phong-gal közösen (P.KISS and B.M.PHONG, 1978) kiterjesztettük tetszésszerinti nem degenerált Lucas sorozatra. Megmutattuk, hogy $g(p)$ nem korlátos függvény, továbbá hogy minden elég nagy p primre

$$g(p) < c\,\frac{p}{\log p}\,,$$

ahol c egy A és B-től függő konstans. Nyitott maradt viszont az a probléma, hogy véges vagy végtelen azon primek száma, melyekre $g(p)=1$, azaz $r(p)=p-(D/p)$? Vagy felvesz-e $g(p)$ gyakran viszonylag kis értékeket?

A következőkben megmutatjuk, hogy $g(p)$ "majdnem minden" primre "nagy". Bebizonyítjuk, hogy ha p az R_n tag primitív primosztója, akkor $g(p)$ nagyságrendje "általában" nagyobb, mint $\log n$. A következő tételt bizonyítjuk.

1. TÉTEL. Legyen R egy nem degenerált Lucas sorozat és legyen $q(x)$ egy pozitív értékő nem csökkenő számelméleti függvény, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{\log n} = 0\,.$$

Jelöljük R(n)-nel

$$Q_n = R_1 . R_2 \dots R_n$$

különböző primosztóinak számát és jelölje H(n) a Q_n azon p primosztóinak számát, melyekre

$$\frac{p-(D/p)}{r(p)} > q\left[r(p)\right].$$

Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H(n)}{R(n)} = 1 .$$

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő Q_n nem zérus. Ugyanis a Lucas sorozat tagjait, mint ismert, $R_n = (\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)$ alakban is megadhatjuk, amiből következik, hogy nem-degenerált sorozat esetén $R_n \neq 0$ ha $n > 0$.

Tételünkből, illetve annak bizonyításából néhány következmény adódik.

1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen R egy nem degenerált Lucas sorozat és legyen q egy tetszőleges rögzített pozitív valós szám. Ekkor $g(p) > q$ majdnem minden p primre.

2. KÖVETKEZMÉNY. Legyen R egy nem degenerált Lucas sorozat és δ egy rögzített valós szám $0 < \delta < 1$ feltétellel. Legyenek Q_n és R(n) a tételben definiált természetes számok, továbbá jelöljük S(n)-nel, illetve T(n)-nel Q_n azon primosztóinak számát, melyekre

$$\frac{p-(D/p)}{r(p)} > \delta \log p$$

illetve

$$r(p) < \frac{1}{\delta} \cdot \frac{p}{\log p} .$$

Ekkor

(1) $$\liminf \frac{S(n)}{R(n)} = 1 - \delta$$

és

(2) $$\liminf \frac{T(n)}{R(n)} = 1 - \delta .$$

Az 1. Tétel és a következmények bizonyításában alkalmazott módszer arra is használható, hogy következtethessünk a Lucas számok primitív primosztóinak nagyságára.

A Lucas számok, illetve általában a lineáris rekuzív sorozatok tagjainak legnagyobb primosztóival és ezek becslésével már többen foglalkoztak, többek között MAHLER (1934); SCHINZEL (1967) és STEWART (1982). A Lucas számokra vonatkozó legjobb eredményt eddig SHOREY és STEWART (1981) érték el. A következőket bizonyították: Jelöljük $\omega(n)$-nel az n természetes szám különböző primosztóinak számát és vezessük be a $q(n)=2^{\omega(n)}$ jelölést. Legyen P_n az R_n Lucas szám legnagyobb primosztója. Ekkor minden $0 < k < 1/\log 2$ feltételt kielégítő k valós és minden olyan n (>3) természetes szám esetén, melynek legfeljebb k.log log n különböző primtényezője van,

$$P_n > c\,(\varphi(n).\log n)/q(n) ,$$

ahol c egy A, B és k-tól függő, effektív kiszámítható konstans és φ az Euler-féle függvény. Továbbá "majdnem minden" n természetes szám esetén

$$P_n > n\,(\log n)^2/f(n)\,\log\log n ,$$

ahol f(x) egy olyan tetszőleges valós értékű függvény, melyre $f(n) \longrightarrow \infty$ ha $n \longrightarrow \infty$.

Az alábbiakban a Lucas számok primitív primosztóira a következő tételt bizonyítjuk.

2. TÉTEL. Legyen δ egy tetszőleges, $0 < \delta < 1$ feltételt kielégítő valós szám és jelöljük V(n)-nel az R sorozat $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tagjai között azoknak az R_i tagoknak a számát, melyeknek minden p primitív primosztójára

$$p \geqq \delta\, i \log i .$$

Ekkor

$$\liminf \frac{V(n)}{n} \geqq 1-\delta .$$

Megjegyezzük, hogy a 2. Tétel a Lucas számok primitív primosztóira gyengébb alsó korlátot ad, mint Stewart idézett eredménye. Stewart azonban csak a legnagyobb primosztókra adott alsó becslést, a mi eredményünk viszont minden primitív primosztóra vonatkozik.

Rátérünk az eredmények bizonyítására.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Használva a tétel jelöléseit, legyen p a Q_n egy primosztója. Így nyilván $r(p) \leqq n$. Ha

(3) $$\frac{p-(D/p)}{r(p)} \leqq q(r(p)) ,$$

akkor

$$p \leqq r(p).q(r(p))+(D/p) \leqq n.q(n)+1 .$$

Ezért a primszámtételből következik, hogy Q_n azon primosztóinak száma, melyekre (3) fennáll, kisebb mint

(4) $$(1+\varepsilon)\, \frac{n.q(n)}{\log(n.q(n))} = \Pi(n) ,$$

ahol $\varepsilon \longrightarrow 0$, ha $n \longrightarrow \infty$. Ebből következik, hogy

$$H(n) > R(n) - \bar{H}(n),$$

ezért csak azt kell bizonyítani, hogy

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\bar{H}(n)}{R(n)} = 0 .$$

STEWART (1977) bizonyította, hogy létezik egy n_0 pozitív konstans úgy, hogy minden $n \geq n_0$ és nem degenerált Lucas sorozat esetén az R_n tagnak van primitív primosztója.

Ezért $R(n) > n-n_0$, ha n elég nagy és így (4) alapján

$$\frac{\bar{H}(n)}{R(n)} < \frac{2.n.q(n)}{(\log n+\log q(n))(n-n_0)} < 3.\frac{q(n)}{\log n},$$

amiből q(n) definiciója miatt (5) következik. Az előzőek alapján ebből már következik a tétel állítása.

<u>A KÖVETKEZMÉNYEK BIZONYÍTÁSA.</u> Az 1. Következmény nyilvánvaló, mivel a q(x)=q konstans függvény kielégíti az 1. Tétel feltételeit. Ezért csak a 2. Következményt kell bizonyítani.

Legyen n elég nagy $(>n_0)$. Ha Q_n egy p primosztójára

$$\frac{p-(D/p)}{r(p)} \leq \delta \log p ,$$

akkor $r(p) \leq n$ miatt

$$p \leq \delta.n.\log p + 1$$

és

$$\frac{p}{\log p} \leq \delta.n + \frac{1}{\log p}$$

következik. Ez azonban csak akkor teljesül, ha

$$p \leqq (\delta+\varepsilon)n.\log n ,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsi, ha p vagy r(p), illetve n elég nagy. Ezek alapján, az 1. Tétel bizonyításában használt gondolatmenethez hasonlóan

$$S(n) \geqq R(n) - (\delta+\varepsilon').n$$

illetve

$$\frac{S(n)}{R(n)} \geqq 1 - \delta - \varepsilon'$$

adódik, ahol ε' tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy. Ebből (1) már következik és (2) hasonlóan bizonyítható.

<u>2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA.</u> Ha az R sorozat valamely R_i tagjának van olyan p primitív primosztója, melyre

$$p \leqq \delta \, i \log i ,$$

akkor erre nyilván

$$p \leqq \delta \, n \log n$$

is teljesül. Ezen primek száma azonban a primszámtétel alapján nyilván kisebb mint $(\delta+\varepsilon).n$, ahol ε tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy. Így

$$V(n) > n - (\delta + \varepsilon).n ,$$

amiből már következik az állítás.

FELHASZNÁLT IRODALOM

D. JARDEN, Recurring sequences, Riveon Lematematika, Jerusalem, Israel, 1958.

P. KISS and B.M.PHONG, On a function concerning second order recurrences, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös 21, 1978, 119-122.

D.H.LEHMER, An extended theory of Lucas functions, Ann. Math. 31, 1930, 419-448.

K. MAHLER, Eine arithmetische Eigenschaft der rekurrierenden Reihen, Mathematica (Leiden) 3, 1934-35, 153-156.

A. SCHINZEL, On two theorems of Gelfond and some of their applications, Acta Arith. 13, 1967, 177-236.

T.N. SHOREY and C.L. STEWART, On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers, II, J. London Math. Soc. (2) 23, 1981, 17-23.

C.L. STEWART, On divisors of terms of linear recurence sequences, J. reine angew. Math. 333, 1982, 12-31.

C.L. STEWART, Primitive divisor of Lucas and Lehmer numbers, Trascendence Theory: advances and applications, (ed. A. Baker and D. Masser), Acad. Press, London, 1977.

MÁTYÁS FERENC

WYTHOFF PÁROK REKURZÍV SOROZATOK TAGJAIBÓL

Abstract: **(Wythoff pairs with respect linear recurrences)** - Let $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recurrence defined by integer constants A,B,G_0,G_1 and the recurrence $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ $(n>1)$ where $A^2+4B>0$, $G_0^2+G_1^2\neq 0$. If α and β are the roots of equation $x^2-Ax-B=0$, then we have $G_n=a\alpha^n-b\beta^n$. Many authors have discussed the properties of Wythoff pairs $\left(u_n;\ v_n\right)$, which are formed by letting $u_1=1$ and taking u_n as the smallest positive integer not yet used, and letting $v_n=u_n+n$. In this paper we deal with the connections between second order linear recurrences G and Wythoff pairs with respect linear recurrences which are defined by $\left(u_n';v_n'\right)=\left(\left[n\alpha^r\right];\left[n\alpha^s\right]\right)$, where r and s are fixed integers with $1\le r<s$, α is the root of polynomial x^2-Ax-B with the greatest absolute value and $[x]$ denotes the integer part of the real number x.

I.

Definiáljuk a $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatot az A,B,G_0,G_1 rögzített egészekkel, melyekre

$D=A^2+4B \neq 0$ és a $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ $(n>1)$ rekurzív formulával. Az $x^2-Ax-B=0$ egyenletet a G sorozat karakterisztikus egyenletének nevezzük, és ha gyökeit α , illetve β jelöli, akkor

$$G_n=a\ \alpha^n - b\ \beta^n , \tag{1}$$

ahol $a=\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta}$, $b=\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}$ (lásd I. Niven, H.S.ZUCKERMANN 1978. 89.oldal.) A $G=G\left(1,1,G_0,G_1\right)$ sorozatot Fibonacci-típusúnak nevezzük.

Értelmezzük továbbá az $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ és $\left\{v_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat az alábbi módon: $u_n:=1$, $v_n:=2$ és $k>1$ esetén $u_k:=m$, $v_k:=u_k+k$, ahol m az a legkisebb pozitív egész, amelyre $u_i \neq m$, $v_i \neq m$ ha $1 \leq i<k$. Az $u_1, u_2, \ldots$, ill. $v_1, v_2 \ldots$ számokat Wythoff számoknak, a belőlük képzett $\left(u_1;v_1\right)$, $\left(u_2;v_2\right)$,... párokat Wythoff pároknak nevezzük. Ez alapján pl. az első öt Wythoff pár a következő: (1;2),(3;5),(4;7),(6;10),(8;13). Az $\left(u_n;v_n\right)$ párok tulajdonságait vizsgálták többek között A.F.HORADAM 1978, R. SILBER 1976, 1977; M.BICKNELL-JOHNSON 1985, V.E.HOGGATT, Jr., A.A.HILLMAN 1978, V.E.HOGGATT, Jr; M.BICKNELL-JOHNSON, R.SARSFIELD 1979.

A Wythoff párok egy-egy tulajdonságát meghagyva általánosított Wythoff párokhoz juthatunk. Így pl. meghagyva az $\left\{u_n\right\}$, $\left\{v_n\right\}$ számok azon tulajdonságát, hogy a pozitív egészeket diszjunkt osztályokba sorolják (lásd G.E.BERGUM, V.E.HOGGATT 1980; V.E.HOGGATT, Jr., M.BICKNELL-JOHNSON 1984) eljuthatunk az alábbi általánosított Wythoff számokhoz: $U_n=2u_n-n$, $V_n=v_n+n$, $Z_n=u_n+2n-1$. V.E.HOGGATT, Jr., M. BICKNELL-JOHNSON 1982-ben bebizonyította, hogy az $\left\{U_n\right\}$, $\left\{V_n\right\}$, $\left\{Z_n\right\}$ számok a pozitív egész három diszjunkt osztályát adják. Az $\left(U_n; V_n; Z_n\right)$ számhármast Wythoff hármasnak is nevezik. Pl. az első három ilyen hármas: $(1;3;2)$, $(4;7;6)$, $(5;10;9)$

Az így általánosított Wythoff számok és a G=G (1,1,1,3) sorozat között talált érdekes kapcsolatot M.BICKNELL-JOHNSON 1985-ben.

Ugyancsak ismert, hogy az eredeti Wythoff számok generálhatók a Fibonacci típusú sorozatok karakterisztikus egyenletének $\varphi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ gyökével az alábbi módon:

$$u_n = \left[n\,\varphi\right] \quad , \quad v_n = \left[n\,\varphi^2\right] \tag{2}$$

ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli (Pl. W.W.ROUSE BALL 1962.) E kapcsolat alapján felvetődik, hogy mely Fibonacci típusú sorozat elemeiből képezhető véges, illetve végtelen sok Wythoff pár. Erre már megadtuk a választ (lásd MÁTYÁS 1982.)

Jelen dolgozatben e kérdéssel általánosabban foglalkozunk. (2) analógiájára értelmezzük az

$$u'_n = \left[n\,\alpha^r\right] \quad , \quad v'_n = \left[n\,\alpha^s\right] \tag{3}$$

egészeket, ahol $1 \le r < s$ fix egész, α pedig legyen az $A>0$, $B\neq 0$, $D=A^2+4B>0$, $G_0^2+G_1^2\neq 0$ feltételeket kielégítő $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)$ sorozat karakterisztikus egyenletének nagyobb abszolut értékű (egyben pozitív) gyöke.

Célunk megadni azokat a G sorozatokat, amelyeknek a tagjaiból végtelen sok $\left(u'_n; v'_n\right)$ pár képezhető. Megjegyezzük, hogy $r=1$, $s=2$, $\alpha=\varphi$

esetben az eredeti Wythoff párokat kapjuk, így dolgozatunk speciális esetként tartalmazza 1982-ben elért eredményünket.

II.

Tétel: Az $A>0$, $B\neq 0$, $D=A^2+4B>0$ és $G_0^2+G_1^2\neq 0$ feltételeket kielégítő $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)$ sorozat $\left(G_n, G_{n+k}\right)$ elemeiből akkor és csak akkor képezhető végtelen sok $\left(u_i', v_i'\right)$ Wythoff pár ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

(i) $a>0$, $k=s-r$, $(0<)$ $|\beta|<1$, $b\neq 0$ és ha $\beta>0$, akkor $b<0$;

(ii) $a>0$, $k=s-r$ és $b=0$;

(iii) $a=0$ $(b\neq 0)$, $|\beta|>1$, $\alpha^{s-r}=\beta^k$ valamely

$k = k_0>1$ egészre és ha $\beta>1$, akkor $b<0$.

(Megjegyzés: G-re tett feltételekből adódik, hogy $\alpha>1$, $\alpha>|\beta|\neq 0$.)

A tétel bizonyítását egy segédtétel bizonyításával kezdjük.

Segédtétel: A tétel feltételeit kielégítő G sorozat tagjaiból akkor és csak akkor képezhető végtelen sok (3) típusú Wythoff pár, ha a

$$\frac{G_n}{\alpha_r} \leq i < \frac{G_n}{\alpha_r} + \frac{1}{\alpha_r} \tag{4}$$

$$\frac{G_{n+k}}{\alpha^s} \le i < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenség rendszer végtelen sok n, n+k, i pozitív egészre fennáll.

A segédtétel bizonyítása: A (G_n, G_{n+k}) pár akkor és csak akkor alkot (3) típusú Wythoff párt, ha $(G_n, G_{n+k}) = ([i\alpha^r], [i\alpha^s])$ valamely i pozitív egészre. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy i kielégíti a

$$G_n \le i \quad \alpha^r < G_n+1$$

$$G_{n+k} \le i \quad \alpha^s < G_{n+k}+1$$

egyenlőtlenség rendszert. α^r -rel, ill. α^s -sel történő osztás után -- mivel $\alpha>1$ -- adódik (4).

Megjegyezzük, hogy (4) megoldhatóságával ekvivalens a jobboldalak felcserélésével nyert

$$\frac{G_n}{\alpha^r} \le i < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s}$$

$$\frac{G_{n+k}}{\alpha^s} \le i < \frac{G_n}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r} \tag{5}$$

egyenlőtlenség rendszer megoldhatósága. Ezért a bizonyítás további részében (4) és (5) közül mindig az alkalmasabb alakot fogjuk használni.

A tétel bizonyítása: A bizonyítást a feltételek szükséges voltának igazolásával kezdjük $a=\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta}\neq 0$ esetben.

- Mivel $\lim_{i\to\infty} u_i' = \lim_{i\to\infty} \left[i\alpha^r\right] = \infty$, ill. $\lim_{i\to\infty} v_i' = \lim_{i\to\infty} \left[i\alpha^s\right] = \infty$ így szükséges, hogy a G sorozat elemei között is végtelen sok különböző pozitív tag legyen. A G sorozatra tett feltételek miatt

$$\alpha > 1, \quad |\beta| < \alpha , \quad \text{s így}$$

$$G_n = a\,\alpha^n - b\,\beta^n = a\,\alpha^n \left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)$$

alapján ez csak akkor lehetsége, ha $a>0$.

- Bizonyítjuk továbbá, hogy ha (5)-nek végtelen sok n,n+k,i pozitív egész megoldása van, akkor k nem lehet tetszőleges. Ugyanis elegendően nagy n, illetve n+k értékekre $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$ miatt igazak az alábbi becslések:

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^n < G_n = a\,\alpha^n \left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right) < 2\,a\,\alpha^n$$

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n+k} < G_{n+k} < 2\,a\,\alpha^{n+k}$$

Alkalmazva ezt (5)-től (ugyancsak elég nagy n, n+k esetén)

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n-r} < \frac{G_n}{\alpha^r} < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s} < 2\,a\,\alpha^{n+k-s} + \alpha^{-s} < 3\,a\,\alpha^{n+k-s}$$

ill.

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n+k-s} < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} < \frac{G_n}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r} < 2\,a\,\alpha^{n-r} + \alpha^{-r} < 3\,a\,\alpha^{n-r} ,$$

melyekből $C_1<k<C_2$ adódik, ahol C_1, C_2 az előzőekből meghatározható konstansok.

- (5)-ből $G_n = a\,\alpha^n - b\,\beta^n$ alakját használva a

$$G_{n-r} - \frac{b\beta^n}{\alpha^r} + b\beta^{n-r} \le i < G_{n-r} + \frac{a\alpha^{n+k} - b\beta^{n+k}}{\alpha^s} - a\alpha^{n-r} + b\beta^{n-r} + \frac{1}{\alpha^s}$$

$$G_{n-r} + \frac{a\alpha^{n+k} - b\beta^{n+k}}{\alpha^s} - a\alpha^{n-r} + b\beta^{n-r} \le i < G_{n-r} - \frac{b\beta^n}{\alpha^r} + b\beta^{n-r} + \frac{1}{\alpha^r}$$

egyenlőtlenségekhez jutunk, melyek ha végtelen sok n, n+k, i gészre igazak, akkor ugyancsak végtelen sok n, n+k-ra igaz a belőlük nyerhető

$$-\frac{1}{\alpha^s} - \frac{b\beta^n}{\alpha^r} < \frac{a\alpha^{n+k} - b\beta^{n+k}}{\alpha^s} - a\alpha^{n-r} < -\frac{b\beta^n}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r},$$

majd átalakítva a

$$-\frac{1}{\alpha^r} < a\alpha^{n-r}\left(\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\alpha^{k-s+r} - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + 1 - \alpha^{k-s+r}\right) < \frac{1}{\alpha^s} \quad (6)$$

egyenlőtlenség is.

De $a>0$, $\alpha>1$, $|\beta|<\alpha$ és elég nagy n-ek esetén $C_1<k<C_2$ miatt (6) csak akkor oldható meg végtelen sok pozitív n, n+k egészre, ha $\alpha^{k-s+r}=1$, mely $\alpha>1$ miatt csak k=s-r esetén teljesül.

- Mivel k=s-r, így (6)-ból a

$$-\frac{1}{\alpha^r} < b\beta^{n-r}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^s - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right) < \frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, melynek $0\ne|\beta|<\alpha$ és $1\le r<s$ miatt csak akkor lehet végtelen sok pozitív n egész megoldása, ha $|\beta|\le 1$, vagy $b=0$. A $|\beta|=1$ és $b\ne 0$ esetet kizárhatjuk a további vizsgálatból, ugyanis $\beta=\pm 1$ esetén α is egész, s így a

$$a\,\alpha^{n} - b\,\beta^{n} = G_{n} = \left[i\,\alpha^{r}\right] = i\,\alpha^{r}$$

$$a\,\alpha^{n+s-r} - b\,\beta^{n+s-r} = G_{n+s-r} = \left[i\,\alpha^{s}\right] = i\,\alpha^{s}$$

egyenlőségekből $\alpha = \pm 1$ következne, ami a G sorozatra tett

$$A = \alpha + \beta > 0$$

$$D = \left(\alpha - \beta\right)^{2} > 0$$

feltételek miatt lehetetlen.

- Bevezetve az $f(n,j)=b\beta^{n-r}\,\frac{\alpha^{j}-\beta^{j}}{\alpha^{j}}$ jelölést, továbbá $G_n=a\alpha^{n}-b\beta^{n}$, $k=s-r$ helyettesítéssel (4)

$$G_{n-r} + f(n,r) \le i < G_{n-r} + f(n,r) + \frac{1}{\alpha}\,r$$

$$\tag{7}$$

$$G_{n-r} + f(n,s) \le i < G_{n-r} + f(n,s) + \frac{1}{\alpha}\,s$$

alakban is írható. Ahhoz, hogy a (7) egyenlőtlenség rendszert végtelen sok n, i pozitív egész kielégítse, szükséges, hogy $f(n,r)\le 0$ és $f(n,s)\le 0$ végtelen sok pozitív n-re teljesüljön, ugyanis elegendően nagy n-ekre ($|\beta|<1$ miatt) pl. $|f(n,r)|<1$ és $f(n,r)+\left(\frac{1}{\alpha}r\right)<1$. Így ha ezekre az n-ekre $f(n,r)>0$ lenne, akkor (7) első egyenlőtlenségéből $G_{n-r}+1\le i\le G_{n-r}$ adódna, mely lehetetlen.

(8) pedig csak akkor nem teljesül végtelen sok pozitív n egészre ha $\beta>0$ esetén $b>0$, mivel $|\beta|<\alpha$.

- Az eddigiekben igazoltuk tételünk (i) vagy (ii) feltételeinek szükségességét és most az a=0 esetet vizsgálva rátérünk az (iii) feltétel szükségességének bizonyítására.

Ha a=0 és $|\beta|\le 1$, akkor G_n, G_{n+k} nem lehet (u_i', v_i') pár végtelen sok n, n+k, i egészre, mivel $|G_n|=|b\beta^n|\le|b|$ minden $n\ge 0$-ra.

- Ha a=0 $(G_n=-b\beta^n)$ és $|\beta|>1$, akkor (5)

$$-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}\le i<-\frac{b\beta^{n+k}}{\alpha^s}+\frac{1}{\alpha^s}$$

$$-\frac{b\beta^{n+k}}{\alpha^s}\le i<-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}+\frac{1}{\alpha^r}$$

alakú, mely ha végtelen sok pozitív n, n+k, i egészre megoldható, akkor a belőle nyerhető

$$-\frac{1}{\alpha^r}<b\beta^n\left(\frac{\beta^k}{\alpha^s}-\frac{1}{\alpha^r}\right)<\frac{1}{\alpha^s} \tag{9}$$

egyenlőtlenséget is kielégíti végtelen sok n, k pozitív egész. De (9) csak akkor oldható meg végtelen sok pozitív n, k egészre, ha

$$\frac{\beta^k}{\alpha^s}-\frac{1}{\alpha^r}=0 \quad \text{vagyis} \quad \beta^k=\alpha^{s-r}$$

teljesül valamely $k=k_0$ esetén $(k_0>1,$ mert $\alpha>|\beta|>1,$ $1\le r<s)$.

- Ha $a=0$, $\beta>1$ és $b>0$, akkor $G_n=-b\beta^n<0$ minden $n\geq 0$-ra, így ebben az esetben biztosan nem képezhető (u_i', v_i') pár a G sorzat tagjaiból.

- A tétel feltételei elégségesek is, ugyanis az (i) esetben ha $a>0$, $k=s-r$, $0<|\beta|<1$, $b\neq 0$ akkor a $0\geq b\beta^{n-r}$ egyenlőtlenséget is kielégítő elegendően nagy n-ekre a

$$0 \leq -f(n,r) < \frac{1}{\alpha^r}$$

$$0 \leq -f(n,s) < \frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenségek szintén teljesülnek. Így vételen sok pozitív n, i megoldása van (7)-nek, valamint a vele ekvivalens (4)-nek is.

- Az (ii) feltétel is elégsége, ugyanis $a>0$, $k=s-r$, $b=0$ esetén

$$G_n = a\,\alpha^n \text{ , s igy (4)}$$

$$G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r} \leq i < a\,\alpha^{n-r} + \frac{1}{\alpha^r}$$

$$G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r} \leq i < a\,\alpha^{n-r} + \frac{1}{\alpha^s}$$

alakú, melynek $\alpha>1$, $1\leq r<s$ miatt nyilván végtelen sok pozitív n, i megoldása van, mivel $G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r}$ egész.

- Az (iii) feltétel elégséges voltát az alábbi módon láthatjuk be.

Mivel $B\neq 0$, így $\beta\neq 0$, továbbá $G_0^2+G_1^2\neq 0$ és $a=\frac{G_1-\beta G_0}{\alpha-\beta}=0$ feltételekből $\beta=\frac{G_1}{G_0}$ következik. Esetünkben $G_n=-b\beta^n$, így $b=-G_0$. $G_n=-b\,\beta^n=G_0\left(\frac{G_1}{G_0}\right)^n$ egész szám minden $n\geq 0$ -ra, ezért $\beta=\frac{G_1}{G_0}$ egész szám, amiből $\alpha+\beta=A$ miatt α is egész. A feltétel szerint létezik olyan $k_0>1$ egész, melyre $\beta^{k_0}=\alpha^{s-r}$, így $G_n=-b\,\beta^n=i\,\alpha^r$

$$G_{n+k_0}=-b\,\beta^{n+k_0}=-b\,\beta^n\,\beta^{k_0}=i\,\alpha^r\,\beta^{k_0}=i\,\alpha^r\,\alpha^{s-r}=i\,\alpha^s$$

egyenletekből következik, hogy ha a $G_n=-b\,\beta^n=i\alpha^r$ egyenletnek végtelen sok pozitív n, i megoldása van, akkor a G sorozat G_n, G_{n+k} elemeiből végtelen sok $\{u_i', v_i'\}$ képezhető. A $G_n=-b\,\beta^n=i\alpha^r$ egyenletet pedig vételen sok pozitív n, i kielégíti, ugyanis a feltételek miatt $G_n=-b\,\beta^n>0$ végtelen sok n esetén, továbbá a $\beta^{k_0}=\alpha^{s-r}$ (α,β egészek) egyenlőségből következik, hogy α és β primhatványtényezős alakjában ugyanazok a primszámok állnak, így elegendően nagy n-ekre

$$\frac{G_n}{\alpha^r}=-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}$$ egész szám.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

FELHASZNÁLT IRODALOM

G.E. Bergum, V.E.Hoggatt, Jr. Some extensions of Wythoff-pairs sequences, The Fibonacci Quart., Vol. 18. 1980; 28-32.

M.Bicknell-Johnson. Generalized Wythoff numbers from simultaneous Fibonacci representations Vol. 23. 1985; 308-318. Fib. Quart.

V.E.~Hoggatt, Jr., A.A.Hillman, A property of Wythoff pairs, The Fibonacci Quart. Vol. 16. 1978; 472.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson, R. Sarsfield, A generalization of Wythoff's Game, The Fibonacci Quart. Val. 18. 1979; 198-211.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson. Additive Partitions of the Positive Integers and Generalized Fibonacci Representation, The Fibonacci Quart. Vol. 22. 1984; 2-21.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson. Lexicographic Ordering and Fibonacci Representations, The Fibonacci Quart. Vol. 20. 1982. 193-218.

A.F. Horadam, Wythoff Pairs, The Fibonacci "Quart. Vol. 16. 1978; 147-151.

Mátyás Ferenc. Wythoff-párok és a másodrendű sorozatok kapcsolata, Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, XVI. kötet, 1982; 547-556.

I. Niven, H.S. Zuckermann, Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Kiadó Bpl. 1978.

W.W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays. Rev. ty H.S.M. Coxeter, New York: Macmillan, 1962; 36-40.

R. Silber, A Fibonacci Property of Wythoff Pairs, The Fibonacci Quart. Vol. 14. 1976; 380-384.

R. Silber, Wythoff's Nim and Fibonacci Representations, The Fibonacci Quart. Vol. 15. 1977; 85-88.

SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ IV.

(A negyedrendű ciklusokról)

Abstract: **(Remarks on iteration of real functions IV.)** A real valued function f(x), defined on the closed interval $[a,b]$, is called iterational basic function if

(i) f(x) is a continuous function at every inside points of the interval $[a,b]$; furthermore f(x) is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;

(ii) f(x) maps the interval $[a,b]$ onto itself;

(iii) there is no subinterval of the interval $[a,b]$ where f(x) is a constant function;

For i=0,1,2,... the function $f_i(x)$, defined by $f_0(x)=x$ and $f_i(x)=f\left(f_{i-1}(x)\right)$ for $i > 0$; is called i^{th} iterated function of f(x). We say a real number c is a fix point of f(x) of order one if f(c)=c, furthermore c is a fix point of order r if $f_r(c)=c$ but $f_n(c)\neq c$ for n=1,2,...,r-1. If c is a fix point of f(x) of order r, then the numbers $f\left(c\right)=c_1$, $f\left(c_1\right)=c_2,\dots,f\left(c_{r-1}\right)=c$ are also fix points of order r and the fix points $c_1,c_2,\dots,c$ give a cycle of order r.

In some earlier papers we gave conditions for f(x) if it has no fix point

of order greater than two, furthermore we have studied iterational basic functions for which the orders of the cycles are unbounded (see SZEPESSY, 1979, 1982, 1984).

In this paper we investigate iterational basic functions for which we have cycles of order at most four.

1. Bevezetés

Legyen f(x) az $[a,b],(a<b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. f(x) az adott szakasz minden belső pontjában folytonos; a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos.
2. f(x) az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben f(x)=constans teljesül.

Az f(x) függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f(f(x)),\dots,f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right),\dots$$

függvényeket az f(x) függvény nulladik, első, második, ..., n-edik (n-edrendű), ... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az $f_n(x)$

(n=2,3,....) függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. (Ezt a közvetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval könnyen bizonyíthatjuk.) Teljesülnek az

$$f_{n+m}(x)=f_n\left[f_m(x)\right]=f_m\left[f_n(x)\right]$$

azonosságok.

Ha $[c,d]$, $(c<d)$ az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$[c,d]_1=[\min f(x), \max f(x)]$, ha $c\leq x\leq d$.) A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n=\left([c,d]_{n-1}\right)_1$ intervallumot értjük.

Ha f(c)=c, akkor a c pontot az f(x) függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\neq c$, n=1,2,..., r-1 esetén, de $f_r(c)=c$, akkor a c pont az f(x) függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor mint ismeretes

$$f\left(c\right)=c_1,\ f\left(c_1\right)=c_2,\ldots,f\left(c_{r-1}\right)=c$$

pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok, s egy r-edrendű ciklust alkotnak. Az első iterációelméleti rendszerező dolgozatok BARNA BÉLA (1960, 1966 majd 1973, 1975) professzortól jelentek meg. Azóta -- dolgozatai kapcsán is -- megnövekedett azoknak a száma, akik iterációelméleti kutatásokat folytatnak, s egyre több eddig még nyitott kérdést tisztáznak.

Előbbi dolgozatokban (SZEPESSY, 1979, 1984) azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén nem lehet a fixpontok, (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Bebizonyítottuk a következőt:

Ha az $[a,b]$ szakaszban f(x) az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz, és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus (SZEPESSY, 1979.)

Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek tetszőleges magasrendű ciklus létezéséhez. Sikerült ugyanis bebizonyítani;

Ha $a \leq c < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(c)=c, f(d)=b, továbbá van a $[d,b]$ szakasznak olyan részszakasza, amelyet f(x) az $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor bármely (természetes) n szám esetén van az f(x) függvénynek n-edrendű fixpontja (SZEPESSY, 1984).

Ezen tétel feltételeinek az elégséges volta miatt kezdtük vizsgálni, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni (SZEPESSY, 1982). Az említett dolgozatban az alapfüggvényre olyan további feltételeket adtunk meg, amelyek mellett csupán első vagy másodrendű fixpontok lehetnek. Bebizonyítottuk egyebek mellett, hogy:

Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(a)=a, f(d)=b, $f(b) \geq d$ és $x \in [a,d]$ esetén $x < f(x) < b$, valamint f(x) a $[d,b]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek (3. tétel).

Ehhez a tételhez analóg a következő állítás:

Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(b)=b, f(d)=a, $f(a) \leq d$ relációk teljesülnek és

$x \in [d,b]$ esetén $x > f(x) > a$, továbbá $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek (4. tétel).

Ebben a dolgozatban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek legfeljebb negyedrendű fixpontok.

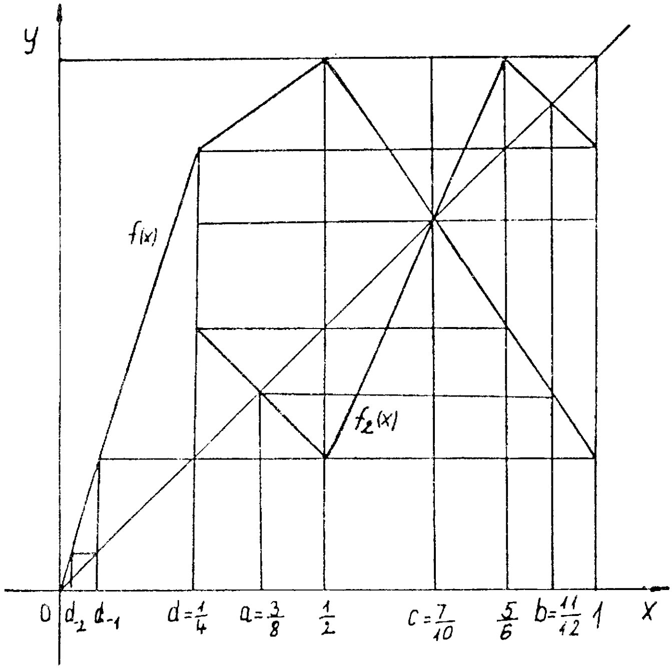
2. A negyedrendű ciklusokról

Legyen a $[0,1]$ szakaszban értelmezett iterációs alapfüggvény az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}(x+1) & \text{ha} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \quad . \qquad \text{(l. 1.ábra)}$$

A 0 és a $c = \frac{7}{10}$ pontok elsőrendű fixpontok.

A $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja van e szakaszban, annak megfelelően, hogy a kezdőpont (az 1. ábra szerinti jelölésben) a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ $(i=0,1,2,\ldots)$ szakaszok melyikében van. Ezek a szakaszok ugyanis egyszeresen és teljesen lefedik a szakaszt; $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ van tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszba esik.



1. ábra

Ezt a szakaszt f(x) önmagára képezi le, tehát x_j minden iterált pontja benne marad a szakaszban. Magasabbrendő fixpontok csak ebben a szakaszban lehetnek.

Az 1. ábrán megrajzoltuk az

$$f_2(x) = \begin{cases} -x+\frac{3}{4} & \text{ha} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4}x-\frac{7}{8} & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{6} \\ -x+\frac{11}{6} & \text{ha} \quad \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}$$

iterált függvény képét is az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszban. Az $a = \frac{3}{8}$ és a $b = \frac{11}{12}$ pontok másodrendű fixpontok. Tekintsük az $\left[\frac{1}{4}, c\right]$ illetve a $[c,1]$ szakaszban $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek. Mivel $f_2(x)$ ezeket a szakaszokat önmagára képezi le és ezekben $f(x) > c$ illetve $f(x) < c(x \neq c)$, ezért 1.-nél magasabbrendű páratlan rendszámú fixpontok az említett szakaszokban, s így az $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ szakaszban nem léphetnek fel.

A bevezetésben is említett (SZEPESSY, 1982) 4., illetve 3. tétel feltételei teljesülnek $f_2(x)$-re az $\left[\frac{1}{4}, c\right]$ illetve a $[c,1]$ szakaszban, s ezek szerint $f_2(x)$-nek ezekben a szakaszokban legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek. Az $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ és az $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$ szakasz pontjai az $a = \frac{3}{8}$ és a $b = \frac{11}{12}$ pontok kivételével $f_2(x)$-nek másodrendű, ezért f(x)-nek negyedrendű fixpontjai.

Tehát f(x) iterációs alapfüggvénynek a $[0,1]$ szakaszban csak első, másod és negyedrendű fixpontjai vannak.

Ez a példa arra mutat, hogy általánosabb esetekben is hasonló lehet a helyzet. Valóban igaz a következő.

1. Tétel: Ha $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(a)=a, f(d)=b, $f(b)=b_1<d$, $f(b_1) = b_2 \geq d_{-1}\,(d<d_{-1}<b)$ relációk teljesülnek és $a < x < d$ esetén $x < f(x) < b$, valamint f(x) a $[b_1, d]$ szakaszban monoton növekedő, a $[d,b]$-ben pedig monoton csökkenő akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendű fixpontok lehetnek. (2. ábra)

Bizonyítás: Mivel $b_1<x<b$ esetén $f(x)>b_1$, ezért az $(a, b_1]$

szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja marad ebben a szakaszban s ez legfeljebb i, ha a kezdőpont a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ szakaszba esik $\left(d_{-(i+1)} = \sup_{a<x<d_{-1}} x,\right.$ $f(x)=d_{-i}$; tehát $d_{-(i+1)}$ az $\left[a, d_{-i}\right]$ szakaszban a legnagyobb abszcisszaérték, amelyben $f(x)$ d_{-i} értékű $(i=0,1,2,3....))$.

A $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ $(i=0,1,2,....)$ szakaszok egyszeresen és teljesen lefedik az $\left[a, b_1\right]$ szakaszt; van tehát oly x_j $(j>i)$ iterált pont, amelyik a $\left[b_1, b\right]$ szakaszba esik.

(A lefedés teljessége abból következik, hogy a d_{-i} $(i=0,1,2,....)$ monoton csökkenő alulról korlátos. $\left(d_{-i} > a\right)$ sorozat, tehát van határértéke.

Legyen $\lim_{i\to\infty} d_{-i} = \alpha$, akkor a $f\left(d_{-(i+1)}\right) = d_{-i}$ egyenlőtlenségekből az $f(x)$ folytonossága által

$$\lim_{i\to\infty} f\left(d_{-(i+1)}\right) = f\left(\lim_{i\to\infty} d_{-(i+1)}\right) = f\left(\lim_{i\to\infty} d_{-i}\right) = f(\alpha) = \lim_{i\to\infty} d_{-i} = \alpha$$

következik azaz α elsőrendü fixpont, s ez csak az $\underline{a}$ pont lehet.

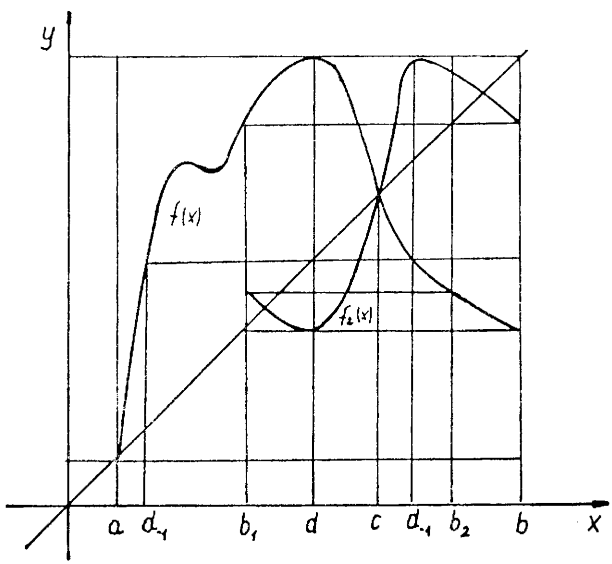
Magasabbrendű fixpontok tehát csak a $\left[b_1, b\right]$ szakaszban lehetnek. Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek ebben a szakaszban. Monoton növekvő (csökkenő) függvény monoton csökkenő (növekvő) függvénye (iterálja) monoton csökkenő, valamint monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye monoton növekvő, ezért $f_2(x)$ a $\left[b_1, d\right]$ szakaszban monoton csökkenő és $f_2(d)=b_1<d$ miatt egy pontban metszi az átlót, a $\left[d, d_{-1}\right]$

szakaszban monoton növekedő és $f_2(d_{-1})=b$, így ebben a szakaszban is lehetnek másodrendű fixpontok; a $[d_{-1},b]$ szakaszban monoton csökkenő tehát itt is lesz egy másodrendű fixpont (2. ábra).

a/ Ha a $[d,d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendű fixpontok, akkor legyen $e = \sup\limits_{d<x<d_{-1}} x,\ f_2(x) = x$ és iteráltja e_1.

Az $[e_1,e]$ szakaszt a benne monoton növekvő $f_2(x)$ függvény önmagára képezi le, így itt (SZEPESSY, 1982) 1. tétel értelmében $f_2(x)$-nek csak első, azaz f(x)-nek másodrendű fixpontjai lehetnek.

Az $[e,b]$ illetve a $[b_1,e_1]$ intervallumban (SZEPESSY, 1982) harmadik illetve negyedik tétele értelmében $f_2(x)$-nek legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek; azaz f(x)-re vonatkozóan az említett szakaszokban legfeljebb negyedrendű fixpontok léphetnek fel.



2. ábra

b/ Ha a $[d, d_{-1}]$ szakaszban nincsenek másodrendű fixpontok (2. ábra) akkor a $[b_1, c]$ illetve a $[c, b]$ szakaszban (c elsőrendű fixpont) ugyancsak a (SZEPESSY, 1982) harmadik és negyedik tétel értelmében (azok feltételei teljesülnek $f_2(x)$-re); f(x)-nek legfeljebb negyedrendű fixpontjai lehetnek.

Mind az a. mind a b. esetben $f_2(x)$ az $[b_1, c]$ illetve $[c, b]$ szakaszokat önmagára képezi le és ezekben a szakaszokban $f(x) > c$ illetve $f(x) < c$ $(x \neq c)$, ezért elsőnél magasabbrendű páratlan rendszámú fixpontok a $[b_1, b]$ szakaszban nem fordulnak elő. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

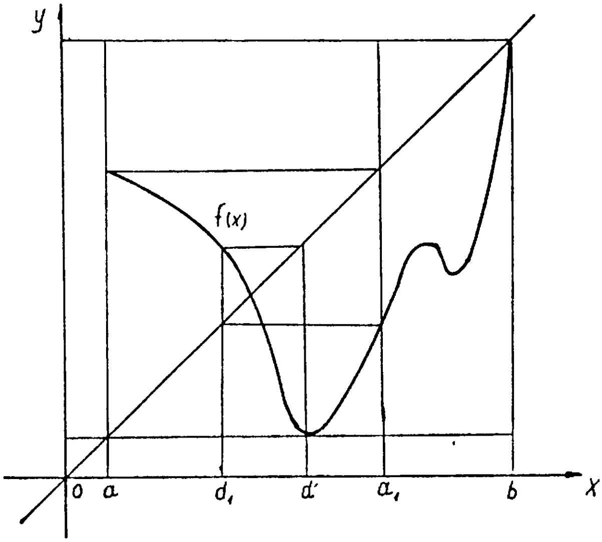
E tételéhz hasonló bizonyítással megmutatható, hogy igaz a tételhez analóg.

2. Tétel: Legyen $a < d < b$ és $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f(d)=a, f(b)=b,

$$f(a) > d,\ f_2(a) \leq d_{-1} \quad (a < d_{-1} < d) \quad \text{és} \quad d < x < b \quad \text{esetén}$$

$$a < f(x) < x, \quad \text{valamint} \quad f(x) \text{ az } [a, d]$$

szakaszban monoton csökkenő a $[d, a_1]$ szakaszban monoton növekvő. Ekkor az $[a, b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendű fixpontok lehetnek (3. ábra).



3. ábra

Az eddigiek alapján könnyen konstruálhatók olyan iterációs alapfüggvények, amelyekre a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos, valamint olyanok, amelyekre legfeljebb negyedrendű fixpontok (ciklusok) léteznek.

További vizsgálódás tárgyát képezi, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek negyedrendűnél magasabb rendű, de felülről korlátos ciklusok.

FELHASZNÁLT IRODALOM

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I. Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16-40.

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II. Publ. Math. (Debrecen) 13 (1966), 169-172.

B. Barna, Berichtigung zur·Arbeit "Über die Iteration reeller Funktionen II." Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281-282.

B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III. Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269-278.

L. Berg, (Rostock) Über irreguläre Iterations - folgen. Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112-115.

A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Mill Inc.), New York, 1965.

A. Björek - G. Dahlgist, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München - Wien, 1972.

J. Stoer, Einfürhrung in die numerische Mathematik I. (Springer) Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I.
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV.
(Eger, 1979.) 395-405.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához II.
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVI.
(Eger, 1982.) 557-566.

Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III.
(A tetszőleges magasrendű ciklusokról)
Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII.
(Eger, 1984.) 835-843.

BUI MINH PHONG

KAPCSOLATOK A KÜLÖNBÖZŐ TÍPUSÚ LUCAS PSZEUDOPRIM SZÁMOK KÖZÖTT

Abstract: (Connections between Lucas pseudoprimes of different types) We investigate the properties of four spcial types of pseudoprimes with respect to Lucas sequences: Euler Lucas pseudoprimes, complete Lucas pseudoprimes, perfect Lucas pseudoprimes, and Gauss Lucas pesudoprimes. We prove some new connections among them.

Legyen A és B két egész szám, amelyekre $D = A^2 - 4B \neq 0$. Definiáljuk az $R = R(A,B) = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $S = S(A,B) = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lucas sorozatokat az A,B paraméterekkel, az $R_0=0$, $R_1=1$, $S_0=2$, $S_1=A$ kezdőelemekkel és az

$$R_n = AR_{n-1} - BR_{n-2} \qquad (n > 1)$$

illetve

$$S_n = AS_{n-1} - BS_{n-2} \qquad (n > 1)$$

rekurzív formulákkal. Legyen α és β az

$$f(x) = x^2 - Ax + B$$

karakterisztikus polinom gyökei és tegyük fel, hogy az R(A,B) és S(A,B)

Lucas sorozatok nem degeneráltak, vagyis $AB\neq 0$, (A,B)=1 és α/β nem egységgyök. Jól ismert, hogy a sorozatok tagjainak explicit előállítása

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

illetve

$$S_n = \alpha^n + \beta^n .$$

Ismert, hogy ha n egy prímszám, amelyre (n,2BD)=1, akkor

(1) $$R_{n-(D/n)} \equiv 0 \pmod n ,$$

(2) $$R_n \equiv (D/n) \pmod n$$

és

(3) $$S_n \equiv S_1 = A \pmod n ,$$

ahol $D=A^2-4B$ és (./n) a Jacobi szimbolum (lásd pl. LEHMER (1930)). Ha n összetett, (n,2BD)=1, de (1) kongruencia teljesül, akkor az n számot Lucas peszudoprimnek nevezzük az R sorozat vonatkozásában. A továbbiakban egy R(A,B) sorozat vonatkozásában az összes Lucas pszeudoprimek halmazát $P[A,B]$ -vel jelöljük. Továbbá, ha egy $n > 0$ összetett egészre (n,2BD)=1 és

(4) $$R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod n, \text{ ha } (B/n)=1$$

vagy

(5) $$S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod n, \text{ ha } (B/n)=-1$$

teljesül, akkor az n számot Euler Lucas pszeudoprimnek nevezzük az R sorozat vonatkozásában és ezek halmazát $EP[A,B]$ -vel jelöljük. Könnyen belátható, hogy ezek a definiciók az A=c+1 és B=c esetben az (n,c-1)=1 feltételt kielégítő közönséges c vonatkozású pszeudoprim, illetve Euler pszeudoprim számokat definiálják, miszerint n szám c egész szám vonatkozásában pszeudoprim, illetve Euler pszeudoprim, ha n összetett, (n,2c)=1 és

$$c^{n-1} \equiv 1 \pmod n$$

illetve

$$c^{\frac{n-1}{2}} = (c/n) \pmod n$$

kongruenciák fennállnak. A továbbiakban c vonatkozású pszeudoprimek, illetve Euler pszudoprimek halmazát $P[c]$ -, illetve $EP[c]$ -vel jelöljük.

A pszeudoprim számokkal kapcsolatos 1972-ig elért eredményekről ROTKIEWICZ (1972/a) adott jó összefoglalást, könyvében számos problémát is felvetett. Az utóbbi időben egyre több szerző foglalkozik pszeudoprim számokkal és különböző általánosításukkal, mert a primtesztek elméletében igen jól használhatók (lásd pl. BAILLIE, WAGSTAFF, Jr. (1980) és POMERANCE, SELFRIDGE, WAGSTAFF, Jr. (1980)). Jól ismert, hogy tetszőleges nem degenerált Lucas sorozatok esetén végtelen sok Lucas, illetve Euler Lucas pszeudoprim szám van (lásd pl: LIEUWENS (1971) és BAILLIE, WAGSTAFF, Jr. (1980)). Ennél többet sikerült bizonyítanunk, megmutattuk, hogy rögzített s természetes szám esetén végtelen sok Euler Lucas pszeudoprim szám létezik, mely pontosan s különböző primszám szorzata és ezek a primszámok választhatók egy számtani sorozat tagjaiból (lásd BUI MINH PHONG (megjelenés alatt) és P. KISS, BUI MINH PHONG, E. LIEUWENS (1986)).

DUPARC (1955), LIEUWENS (1971) és ROTKIEWICZ (1972/B) foglalkoztak azokkal az n összetett számokkal, amelyek egyidejűleg kielégítik az (1), (2) és (3) kongruenciákat. Ilyen tulajdonságú összetett számokat teljes Lucas pszeudoprimeknek nevezzük és halmazukat $CP[A,B]$ -vel fogjuk jelölni. DUPARC (1955) bizonyította, hogy az (1), (2) és (3) kongruenciák lineárisan függőek (mod n), vagyis ha egy n összetett egész esetén az (1), (2) és (3) kongruenciák közül bármely kettő teljesül, akkor a harmadik kongruencia is teljesül. A Lucas pszeudoprim számok körében egyik nyitott probléma az, hogy a teljes Lucas pszeudoprim számok halmaza, vagyis $CP[A,B]$, végtelen-e? Ez a probléma nehéznek tűnik. Például abban a speciális esetben, amikor A=5 és B=6, az $n \in CP[5,6]$ állítás egyenértékű azzal, hogy n egyidejűleg kielégíti az

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

és

$$3^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

kongruenciákat. Még nem tudjuk, hogy a fenti kongruenciák teljesülnek-e végtelen sok összetett egészre (lásd ROTKIEWICZ (1972/a), 23. probléma), az azonban ismert, hogy a 25.10^9 -nél kisebb számok között 4709 darab ilyen tulajdonságú n természetes szám létezik (lásd pl. POMERANCE, SELFRIDGE, WAGSTAFF, Jr. (1980)). ROTKIEWICZ (1972/b) bizonyította, hogy ha R(A,B) nem degenerált Lucas sorozat, amelyre B=1 vagy B=-1, akkor végtelen sok teljes Lucas pszudoprim szám létezik, vagyis $CP[A,\pm 1]$ végtelen halmaz. Ezt az eredményt egy korábbi cikkben, illetve egy P.KISS és E.LIEUWENS szerzőkkel közösen írt dolgozatban megjavítottuk, bizonyítva, hogy tetszőleges $a,s > 1$ és A egészek esetén $CP[A,\pm 1]$ végtelen sok olyan Euler Lucas pszeudoprim számot tartalmaz, mely pontosan s különböző ax+1 alakú primszám szorzata (lásd BUI MINH PHONG (megjelenés alatt) és P.KISS, BUI MINH PHONG, E.LIEUWENS (1986)).

Ebben a dolgozatban megadjuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy természetes számra $n \in CP\,[A,B]$ fennálljon és kapcsolatokat mutatunk meg az $EP\,[A,B]$, $CP\,[A,B]$ és $EP\,[B]$ halmazok között.

Először megjegyezzük, hogy minden $n \in P\,[A,B]$ szám egyértelműen írható $n = n_R . n_S$ alakban, ahol n_R és n_S pozitív egészek, amelyekre a következő feltételek teljesülnek:

(i) $\left(n_R,\ n_S\right) = 1$

(ii) $R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n_R}$

és

(iii) $S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n_S}$.

Valóban $n \in P\,[A,B]$ feltételből következik, hogy n páratlan szám és így a sorozatok explicit alakja alapján

(6) $$R_{n-(D/n)} = R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \cdot S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n} .$$

Mivel minden $k \geq 1$ esetén $\left(R_k, S_k\right) = 1$ vagy 2, ezért (6) miatt a fenti felbontás lehetséges és nyilvánvalóan egyértelmű.

Felhasználva ezen jelöléseket, a következőket fogjuk bizonyítani.

1. TÉTEL. Legyenek R(A,B) és S(A,B) nem degenerált Lucas sorozatok, és legyen $n = n_R \cdot n_S$ egy Lucas pszeudoprim, amelyre az (i), (ii) és (iii) feltételek teljesülnek.

n akkor és csak akkor teljes Lucas szeudoprim. szám, ha

$$(7) \qquad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n_R} \quad \text{és} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{n_S} .$$

2. TÉTEL. Legyenek R(A,B) és S(A,B) nem degenerál Lucas sorozatok. Ekkor az

a/ n teljes Lucas pszeudoprim $(n \in CP[A,B])$

b/ n Euler Lucas pszeudoprim $(n \in EP[A,B])$

c/ n Euler pszudoprim B vonatkozásában $(n \in EP[B])$

állítások függőek, vagyis közöttük bármely kettőből következik a harmadik. Másszóval

$$CP[A,B] \cap EP[A,B] = CP[A,B] \cap EP[B] = EP[A,B] \cap EP[B] =$$
$$= CP[A,B] \cap EP[A,B] \cap EP[B] .$$

A továbbiakban legyen

$$PP[A,B] = CP[A,B] \cap EP[A,B] \cap EP[B]$$

és nevezzük az $n \in PP[A,B]$ számokat tökéletes Lucas pszudoprimeknek.

Euler Lucas pszeudoprim számok mintájára vezessünk be egy új típusú Lucas pszeudoprim fogalmat. Mivel (4) és (5) teljesül minden primszámra és ha n primszám (n,2BD=1) feltétellel, akkor

$$B^{\frac{n-1}{2}} \equiv (B/n) \quad (\mathrm{mod}\ n) ,$$

ezért primek esetén (4) és (5) az

$$(8) \qquad R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ n), \quad \text{ha} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

vagy

$$(9) \qquad S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ n), \quad \text{ha} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

kongruenciákkal egyenértékű. Legyen n olyan összetett szém, melyre (n,2BD)=1 és

$$B^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{vagy} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ n) .$$

Ekkor az n számot Gauss Lucas pszeudoprimnek nevezzük, ha (8) vagy (9) fennáll. Megyjegyezzük, hogy Euler Lucas pszeudoprim és Gauss Lucas pszeudoprim fogalmak különbözőek, vagyis nem mindig következnek egymásból. Például az A=17 és B=35 esetén $n=17.73=1241 \in EP[17,35]$, de n=1241 nem Gauss Lucas pszudoprim szám, mert

$$35^{620} \equiv 1004 \quad (\mathrm{mod}\ 1241) .$$

A továbbiakban az összes Gauss Lucas pszeudoprimek halmazát $GP[A,B]$-vel fogjuk jelölni. Érvényesek a következő állítások.

3. TÉTEL. Legyenek R(A,B) és S(A,B) nem degenerált Lucas sorozatok. Ekkor

a/ Ha n tökéletes Lucas pszeudoprim, akkor n Gauss Lucas pszeudoprim.

b/ Ha n Gauss Lucas szeudoprim, akkor n teljes pszeudoprim.

Másszóval: $PP[A,B] \subseteq GP[A,B] \subseteq CP[A,B]$.

4. TÉTEL. Legyenek R(A,B) és S(A,B) nem degenerált Lucas sorozatok, amelyekre B=1 vagy B=-1. Továbbá legyenek $a,s > 1$ természetes számok. Ekkor végtelen sok tökéletes Lucas pszeudoprim szám létezik, mely pontosan s különböző ax+1 alakú primszám szorzata. Másszóval $PP[A,\pm 1]$ végtelen sok $n=p_1 \dots p_s$ alakú elemet tartalmaz, ahol $p_1,\dots,p_s$ különböző ax+1 alakú primszámok.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A 4. Tétel állítása B=1 és B=-1 esetekben nyilvánvalóan igaz a $GP[A,\pm 1]$ és $CP[A,\pm 1]$ halmazokra is.

2. Megjegyezzük, hogy R(A,B) és S(A,B) sorozatok explicit előállítása alapján könnyen igazolhatók a következő összefüggések

(10) $$R_n - (D/n)\, B^{\frac{n-1}{2}} = R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \cdot S_{\frac{n+(D/n)}{2}}$$

(11) $$R_n + (D/n)\, B^{\frac{n-1}{2}} = R_{\frac{n+(D/n)}{2}} \cdot S_{\frac{n-(D/n)}{2}} ,$$

amelyeket fel fogunk használni a bizonyításokban.

Most rátérünk a tételek bizonyítására.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen $n = n_R\, n_S \in P[A,B]$, amelyre az (i), (ii) és (iii) feltételek teljesülnek. Így (10) és (11) alapján

(12) $$R_n \equiv (D/n)\, B^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n_R}$$

és

(13) $$R_n \equiv -\,(D/n)\, B^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n_S}$$

következik.

Legyen n teljes Lucas pszeudoprim szám, vagyis tegyük fel, hogy n-re az (1), (2) és (3) kongruenciák teljesülnek. Így (12), (13) és (2) alapján valóban (7) következik.

Fordítva, tegyük fel, hogy (7) teljesül. Ekkor (7) és (12), valamint (7) és (13) alapján

$$R_n \equiv (D/n) \pmod{n_R} \quad \text{és} \quad R_n \equiv (D/n) \pmod{n_S} ,$$

amiből (i) alapján

$$R_n \equiv (D/n) \pmod{n} .$$

Tehát n kielégíti a (2) kongruenciát és n megválasztása miatt nyilván (1)-et is, amiből DUPARC említett eredménye alapján következik, hogy n teljes Lucas pszeudoprim szám.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen n egy teljes Lucas és emellett Euler Lucas pszeudoprim szám. Ha (B/n)=1, akkor (2), (4) és (10) alapján

$$B^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod n$$

következik. Ha pedig (B/n)=-1, akkor (2), (5) és (11) alapján

$$B^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod n$$

következik. Tehát mindkét esetben

$$B^{\frac{n-1}{2}} \equiv (B/n) \pmod n ,$$

vagyis n egy Euler pszeudoprim B vonatkozásában.

Most legyen n egy teljes Lucas pszeudoprim és emellett B vonatkozású Euler pszeudoprim. Ekkor BAILLIE és WAGSTAFF, Jr. (1980) egyik eredménye (Theorem 5., p. 1397) alapján n valóban Euler Lucas pszeudoprim szám.

Végül legyen n egy Euler Lucas és emellett B vonatkozású Euler pszeudoprim szám. Mivel n Euler pszeudoprim B vonatkozásában, ezér a definició szerint

$$(14) \qquad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv (B/n) \pmod n .$$

Így (4), (10) és (14), valamint (5), (11) és (14) alapján valóban (2) kongruencia következik. Tehát DUPARC eredménye alapján n valóban teljes Lucas pszeudoprim szám, mert (1) nyilván teljesül minden Euler Lucas pszeudoprim esetén.

3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA a/ Legyen n egy tökéletes Lucas pszeudoprim szám. Ekkor n Euler Lucas pszeudoprim és B vonatkozású Euler pszeudoprim szám. Így

$$R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod n, \quad \text{ha} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv (B/n) = 1 \pmod n$$

vagy

$$S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod n, \quad \text{ha} \quad B^{\frac{n-1}{2}} \equiv (B/n) = -1 \pmod n,$$

amiből következik, hogy n valóban Gauss Lucas pszeudoprim.

b/ Legyen n egy Gauss Lucas pszeudoprim szám, vagyis tegyük fel, hogy (8) vagy (9) teljesül. Ha (8) teljesül, akkor $n_R = n$, $n_S = 1$ és így (7) érvényes. Ha pedig (9) teljesül, akkor $n_R = 1$, $n_S = n$ és így (7) ismét fennáll. Tehát az 1. Tétel alapján n valóban teljes Lucas pszeudoprim szám.

4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Kiss Péterrel és Erik Lieuwens-szel közösen bizonyítottuk, hogy ha az R(A,B) Lucas sorozat nem degenerált és $D=A^2-4B > 0$, akkor tetszőleges $a,s > 1$ természetes számok esetén végtelen sok Euler Lucas pszeudoprim szám létezik, mely pontosan s különböző ax+1 alakú primszám szorzata (lásd P.KISS, BUI MINH PHONG, E.LIEU-

WENS (1986), Theorem 1.).

Ha egy Lucas sorozatban $B=1$ vagy $B=-1$ és nem degenerált, akkor $D=A^2-4B = A^2 \pm 4 > 0$. Ezért $B = \pm 1$ esetén a fenti eredmény alapján végtelen sok olyan Euler Lucas pszeudoprim létezik, mely pontosan s különböző $4ax+1$ alakú primszám szorzata. Nyilvánvaló, hogy ezek is Euler pszeudoprimek $B = \pm 1$ vonatkozásában. Ebből 2. Tétel alapján az állításunk már következik.

FELHASZNÁLT IRODALOM

BAILLIE R., WAGSTAFF S.S.,JR. (1980), Lucas pseudoprimes, Math.Comp., 35.,pp.1391-1417.

BUI MINH PHONG, Lucas és Lehmer pszeudoprim számokról, Matematikai Lapok, 33., 1982-1985, megjelenés alatt.

DUPARC H.J.A. (1955), On almost primes of the second order, Report Z.W. 1955-013, Math. Center, Amsterdam, pp. 1-13.

KISS P., BUI MINH PHONG, E. LIEUWENS, On Lucas pseudoprimes which are products of s primes, Fibonacci numbers and their applications, (ed. by A.N. Philippou, G.E. Bergum, A.F. Horadam), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo, 1986, pp. 131-139.

LEHMER D.H. (1930), An extended theory of Lucas' functions, Ann. Math., 31., pp. 419-448.

LIEUWENS E. (1971), Fermat pseudoprimes, Doctor thesis, Delft.

POMERANCE C., SELFRIDGE J.L., WAGSTAFF S.S. Jr. (1980), The pseudoprimes to 25.10^9m Math.Comp., 35., pp.1003-1026.

ROTKIEWICZ A. (1972/a), Pseudoprime numbers and their generalizations, Univ. of Novi Sad.

ROTKIEWICZ A. (1972/b), On pseudoprimes with respect to the Lucas sequences, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math.Astr.Phys., 21., pp. 793-797.

BOGDAN TROPAK (ZIELONA GORA, POLAND)

SOME ALGEBRAIC PROPERTIES OF LINEAR RECURRENCES

Abstract: In the paper a definition of a form associated to a linear recurrence is given without the restriction that the roots of its characteristic polynomial are different and moreover some properties of this form are studied. This is an extension of some results of P. Kiss (1983.)

1. Introduction.

A linear recurrence $G = \left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ of order $k(>1)$ is defined by rational integers $A_1, A_2, \ldots, A_k$ and by recursion $G_n = A_1G_{n-1}+\ldots+A_kG_{n-k}$, $n \geq k$, where the initial values $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$ are fixed rational integers not all zero, $A_k \neq 0$. To the recurrence G we order a characteristic polynomial $g_G(x)$ as follows

(1) $$g_G(x)=x^k-A_1x^{k-1}-\ldots-A_{k-1}x-A_k$$

If $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ are the roots of $g_G(x)$ satisfying the condition that $\alpha_i \neq \alpha_j$ for $i \neq j$ then we define a form f_g of k variables $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$ by the formula

(2) $$f_g\left(X_0, \ldots, X_{k-1}\right)=(\det D)^{2-k} \prod_{i=1}^{k} \det M_i ,$$

where

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}, \quad M_i = \begin{bmatrix} X_0 & 1 & \dots 1 & 1 & \dots 1 \\ X_1 & \alpha_1 & \dots \alpha_{i-1} & \alpha_{i+1} & \dots \alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{k-1} & \alpha_1^{k-1} & \dots \alpha_{i-1}^{k-1} & \alpha_{i+1}^{k-1} & \dots \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}.$$

From (2) it follows that for $k>2$ the restriction on the roots of $g_G(x)$ is essential.

P.Kiss (1983) has studied the form f_g and from it he has derived some properties of linear recurrences.

In this paper we define for arbitrary linear recurrence G a form F_g such that if the roots of $g(x)$ are different then $F_g = f_g$. Further we show that some results of P.Kiss remain valid in this general case. Finally we prove a connection between the factorisation of $g(x)$ and of F_g

2. Definition and properties of F_g.

Let G be a linear recurrence of order k and let

$$g(x) = x^k - A_1 x^{k-1} - \dots - A_{k-1}x - A_k, \quad A_k \neq 0,$$

be its characteristic polynomial. Define for $l=1,2,\dots,k$

$$(3) \qquad g_l(x) = -\sum_{m=l}^{k} A_{k-m}x^{m-1} \quad \text{with} \quad A_0=-1$$

and for the variables $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$

$$(4) \qquad z_\alpha = \sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha)X_{l-1}$$

where α is a root of $g(x)$.

Let $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ be roots of $g(x)$ (obviously a root of multiplicity r is taken r times) and $X_0,X_1,\dots,X_{k-1}$ be variables. The form

$$(5)\qquad F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right) = \prod_{i=1}^{k} z_{\alpha_i}$$

will be called a form associated to $g(x)$.

Lemma 1.

If $g(x)$ is a polynomial having distinct roots then

$$F_g = f_g \ .$$

Proof:

Assume that the degree of $g(x)$ is k and α_i, $1 \le i \le k$ are its roots. Consider the following system of equations

$$(6)\qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + \dots + y_k = X_0 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k = X_1 \\ \alpha_1^2 y_1 + \alpha_2^2 y_2 + \dots + \alpha_k^2 y_k = X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^{k-1} y_1 + \alpha_2^{k-1} y_2 + \dots + \alpha_k^{k-1} y_k = X_{k-1} \end{cases}$$

with y's as unknowns.

By the assumption of lemma, (6) is Cramer's system hence

$$(7)\qquad y_i = (\det D)^{-1}\det M_i(-1)^{i-1} \quad \text{for } i=1,2,\dots,k$$

where D and M_i are as in (2).

On the other hand it is easy to verify that for

$a_{i,j} = \dfrac{g_j(\alpha_i)}{g'(\alpha_i)}$, $1 \le i,j \le k$ we have $D^{-1} = \left[a_{i,j}\right]$.

Therefore from (6) we obtain that

$$(8)\qquad y_i = \sum_{l=1}^{k} a_{i,l}X_{l-1} = \frac{1}{g'(\alpha_i)} \sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha_i)X_{l-1} = \frac{z_{\alpha_i}}{g'(\alpha_i)} \ .$$

Since

$$\prod_{i=1}^{k} g'\left(\alpha_i\right) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} . (\det D)^2$$

then from (2), (7), (8) and (5) we get

$$f_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right) = (\det D)^{2-k} \prod_{i=1}^{k} \left[(-1)^{i-1} y_i \det D\right] =$$

$$= (\det D)^2 (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{i=1}^{k} y_i = \prod_{i=1}^{k} z_{\alpha_i} = F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right) .$$

This ends the proof.

Theorem 1. (comp. Thm. 1 in Kiss, 1983).

The form $F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right)$ has rational integer coefficients and the coefficient of X_{k-1}^k is one.

Furthermore

$$F_g\left(G_n, G_{n+1},\dots,G_{n+k-1}\right) = \left[(-1)^{k-1} A_k\right]^n . F_0$$

for all integer $n \geq 0$, where $F_0 = F_g\left(G_0, G_1,\dots,G_{k-1}\right)$.

Proof:

By (3) and (4) we can write

$$\sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha_i) X_{l-1} = \sum_{m=0}^{k-1} u_m \alpha_i^m$$

where $u_m = u_m\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right)$ are linear forms with rational integer coefficients and then

$$F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{m=0}^{k-1} u_m \alpha_i^m\right)$$

and the coefficients of $u_0^{r_0} \dots u_{k-1}^{r_{k-1}}$ are rational as symmetrical polynomials in $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Since α_i's are algebraic integers then these coefficients and in particulary the coefficients of $F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right)$ are rational integers. Moreover $g_k(x) = 1$ hence the coefficient of X^k_{k-1} is equal to

$$\prod_{i=1}^{k} g_k\,(\alpha_i) = 1 \ .$$

For the proof of second part of the theorem put $g_0(x)=g(x)$ and remark that

$$g_l(x) = \frac{g_{l-1}(x)+A_{k-l+1}}{x} \qquad \text{for} \quad l=1,2,\dots,k \ .$$

Now for $\alpha = \alpha_j$, $1 \le j \le k$ and for any $n\ge0$ we have

$$\alpha \sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha)\; G_{n+l-1} = \sum_{l=1}^{k} \left(g_{l-1}(\alpha)+A_{k-l+1}\right) G_{n+l-1} =$$

$$= \left(g_0(\alpha)+A_k\right)G_n + \sum_{l=2}^{k} g_{l-1}(\alpha)G_{n+l-1} + \sum_{l=2}^{k} A_{k-l+1}G_{n+l-1} =$$

$$= A_kG_n + \sum_{l=1}^{k-1} A_{k-l}G_{n+l} + \sum_{l=1}^{k-1} g_l(\alpha)G_{n+l} = \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}G_{n+l} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} g_l(\alpha)G_{n+l} = G_{n+k} + \sum_{l=1}^{k-1} g_l(\alpha)G_{n+l} = \sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha)G_{n+l}$$

because $G_{n+k} = G_{n+k}g_k(\alpha)$.

From the above calculations we obtain

$$F_g\left(G_{n+1},\dots,G_{n+k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha_i)G_{n+l}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i \sum_{l=1}^{k} g_l(\alpha_i)G_{n+l-1}\right) = F_g\left(G_n,\dots,G_{n+k-1}\right)\prod_{i=1}^{k} \alpha_i =$$

$$= F_g\left(G_n,G_{n+1},\dots,G_{n+k-1}\right)(-1)^{k-1}A_k$$

and the proof easily follows by the induction.

<u>Theorem 2</u>. (see Thm.2 in Kiss, 1983.)

If

$$\xi_{i,n} = a_{0,n} + a_{1,n}\,\alpha_i + \dots + a_{k-1,n}\,\alpha_i^{k-1}, \qquad n\geq 0$$

where

$$a_{t,n} = G_{n+k-t-1} - \sum_{j=1}^{k-t-1} A_j G_{n+k-t-j-1}, \qquad 0\leq t\leq k-1$$

and if

$$U_n = \prod_{i=1}^{k} \xi_{i,n}$$

then

$$U_n = \left[(-1)^{k-1} A_k\right]^n U_0 \; .$$

<u>Proof</u>:

For $1 \leq i \leq k$ we have

$$z_{\alpha_i} = \sum_{m=1}^{k} X_{m-1} \sum_{l=m}^{k} \left(-A_{k-l}\,\alpha_i^{l-m}\right) = - \sum_{m=1}^{k} X_{m-1} \sum_{l=0}^{k-m} A_{k-l-m}\alpha_i^l =$$

$$= - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_i^l \sum_{m=1}^{k-l} A_{k-l-m} X_{m-1} = \sum_{l=0}^{k-1} \left[-A_0 X_{k-l-1} - \sum_{m=1}^{k-l-1} A_{k-l-m} X_{m-1}\right] \alpha_i^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_i^l \left(X_{k-l-1} - \sum_{m=1}^{k-l-1} A_m X_{k-l-m-1}\right)$$

and putting $X_r = G_{n+r}$, $r=0,1,\dots,k-1$ we obtain

$$z_{\alpha_i} = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_i^l \left(G_{n+k-l-1} - \sum_{j=1}^{k-l-1} A_j G_{n+k-l-j-1}\right) = \xi_{i,n}$$

and now by definition of F_g and by Theorem 1 we get the proof.

3. A connection between $g(x)$ and F_g.

Lemma 2. Let

$$g(x) = x^k - A_1x^{k-1} - \dots - A_{k-1}x - A_k ,$$

$$u(x) = x^s - B_1x^{s-1} - \dots - B_{s-1}x - B_s ,$$

$$v(x) = x^r - C_1x^{r-1} - \dots - C_{r-1}x - C_r$$

and let

$$g(x) = u(x)\, v(x).$$

If $F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right)$ is the associated form to $g(x)$ then

$$F_g\left(X_0,\dots,X_{k-1}\right) = F_u\left(Z_0,\dots,Z_{s-1}\right)F_v\left(Y_0,\dots,Y_{r-1}\right)$$

where F_u and F_v are forms associated to $u(x)$ and $v(x)$, respectively and

$$Z_j = -\sum_{t=0}^{r} C_{r-t}X_{j+t}, \quad j=0,1,\dots,s-1 \quad \text{with} \quad C_0=-1,$$

$$Y_i = -\sum_{n=0}^{s} B_{s-n}X_{i+n}, \quad i=0,1,\dots,r-1 \quad \text{with} \quad B_0=-1.$$

Proof: For the brevity put

$$a_l = -A_{k-l} , \qquad 1 \le l \le k ,$$

$$b_n = -B_{s-n} , \qquad 1 \le n \le s ,$$

$$c_m = -C_{r-m} , \qquad 1 \le m \le r$$

and let $\alpha_i = \alpha$ be a root of $u(x)$. By (3) and (4) we have

$$z_\alpha = \sum_{t=1}^{k} g_t(\alpha)X_{t-1} = \sum_{t=1}^{k} X_{t-1} \sum_{l=t}^{k} a_l \alpha^{l-t} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} X_{t-1} \sum_{l=t}^{k} \sum_{\substack{m+n=l \\ 0\le m\le r \\ 0\le n\le s}} c_m b_n \alpha^{m+n-t} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} X_{t-1} \sum_{\substack{m+n\geq t\\ 0\leq m\leq r\\ 0\leq n\leq s}} c_m b_n \alpha^{n-(t-m)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} X_{t-1} \sum_{m=0}^{r} c_m \sum_{\substack{n=0\\ n\geq t-m}}^{s} b_n \alpha^{n-(t-m)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{r} c_m \sum_{t=m+1}^{k} X_{t-1} \sum_{n=t-m}^{s} b_n \alpha^{n-(t-m)} .$$

The last equality follows from the fact that for $t\leq m$ we have

$$\sum_{\substack{n=t-m\\ n\geq 0}}^{s} b_n \alpha^{n-t-m} = \alpha^{m-t} \sum_{n=0}^{s} b_n \alpha^{n} = \alpha^{m-t}\ u(\alpha) = 0.$$

Now, changing the order of summation and understanding $u_1(x)$ similarly as $g(x)$ in (3) we obtain

$$z_\alpha = \sum_{p=1}^{s} \sum_{n=p}^{s} b_n \alpha^{n-p} \sum_{m=0}^{r} c_m \sum_{\substack{t=m+1\\ t-m=p}}^{r} X_{t-1} =$$

$$= \sum_{p=1}^{s} u_p(\alpha) \sum_{m=0}^{r} c_m X_{p-1+m} =$$

$$= \sum_{p=1}^{s} u_p(\alpha) \sum_{m=0}^{r} \left(-c_{r-m} X_{p-1+m}\right) = \sum_{p=1}^{s} u_p(\alpha)\ Z_{p-1}.$$

Analogously for β being a root of $v(x)$ we obtain

$$z_\beta = \sum_{l=1}^{r} v_l(\beta)\ Y_{l-1} .$$

Without loos of the generality we can assume that the roots of $g(x)$ are $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ and that α_i are the roots of $u(x)$ and β_j of $v(x)$.

Now by the definition of F_g we have

$$F_g\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) = \prod_{i=1}^{s} z_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{r} z_{\beta_j} =$$

$$= F_u\left(Z_0, \dots, Z_{s-1}\right) . F_v\left(Y_0, \dots, Y_{r-1}\right)$$

what ends the proof.

<u>Theorem 3</u>.

If $g(x) = g_1(x) \dots g_r(x)$ is a decomposition of $g(x)$ on irreducible factors then

$$(9) \qquad F_g\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) =$$

$$= F_{g_1}\left(X_0^{(1)}, \dots, X_{k_1-1}^{(1)}\right) \dots F_{g_r}\left(X_0^{(r)}, \dots, X_{k_r-1}^{(r)}\right)$$

where $X_i^{(j)}$ are linear forms in $X_0, \dots, X_{k-1}$ and F_{g_i} are forms associated to $g_i(x)$, irreducible over the rational field and conversely if

$$F_g\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) = F_1\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) \dots F_r\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right)$$

is a decomposition of F_g on irreducible factors then $g(x)$ is decomposable on r irreducible factors $g_1(x), \dots, g_r(x)$, say and F_g has the form (9).

<u>Proof</u>:

By Lemma 2 it is enough to prove that if

$$F_g\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) = F_1\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right) . F_2\left(X_0, \dots, X_{k-1}\right)$$

with not constant F_1, F_2 then $g(x)$ is reducible.

Suppose that by above condition $g(x)$ is irreducible. Then $g'(\alpha) \neq 0$ for any α being a root of $g(x)$. Put

$$X_j = \sum_{r=1}^{k} \left(x - \alpha_r\right) \alpha_r^j \quad , \qquad j=0,1,\ldots,k-1$$

where α_j are roots of $g(x)$. First of all we see that X_j has a form $a_j x + b_j$ with rational a,b . Thus we have

$$(10) \qquad F_g\left(X_0,\ldots,X_{k-1}\right) = u_1(x)\, u_2(x)$$

with not constant u_1 and u_2 .

On the other hand we have

$$F_g\left(X_0,\ldots,X_{k-1}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left[\sum_{t=1}^{k} g_t(\alpha_i) X_{t-1} \right] .$$

But

$$\sum_{t=1}^{k} g_t\left(\alpha_i\right)\left(x-\alpha_j\right)\alpha_j^{t-1} = \left(x-\alpha_j\right) \sum_{t=1}^{k} g_t\left(\alpha_i\right)\alpha_j^{t-1} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ g'(\alpha_i)(x-\alpha_i) & \text{if } i=j \end{cases}$$

hence

$$\sum_{t=1}^{k} g_t(\alpha_i) X_{t-1} = \sum_{r=1}^{k} \left(x-\alpha_r\right) \sum_{t=1}^{k} g_t\left(\alpha_i\right)\alpha_r^{t-1} = \left(x-\alpha_r\right) g'\left(\alpha_i\right)$$

and from this it follows that

$$F_g\left(X_0,\ldots,X_{k-1}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(x-\alpha_i\right) g_i\left(\alpha_i\right) = g(x)\ A$$

with a rational $A \neq 0$ what common with (10) gives a contradiction to the assumption on $g(x)$.

This contradiction completes the proof.

REFERENCE

P.Kiss, On some properties of linear recurrences,
Publ.Math. Debrecen 1983 pp.273-281.

KRYSTYNA BIAŁEK AND ALEKSANDER GRYTCZUK

THE EQUATION OF FERMAT IN $G_2(k)$ AND $Q\left(\sqrt{k}\right)$

1. INTRODUCTION

Let $G_2(k)$ be the set of matrices of the form

(1) $$\begin{bmatrix} r & s \\ ks & r \end{bmatrix}$$

where k is fixed integer such that $k \neq 0$ and $r,s \neq 0$ are arbitrary integers.

The purpose of this paper is to give a connection between the solution of Fermat equation in $G_2(k)$ and the solution of this equation in $Q\left(\sqrt{k}\right)$.

Some partial results concerning above problem are given in [1], [2], [4] (comp. [5]).

We prove the following theorems:

THEOREM 1.

The necessary and sufficient condition for the equation

(2) $$A^n + B^n = C^n ,$$

$(n \geq 2)$ to have a solution in elements $A,B,C \in G_2(k)$ is the existence of the numbers $\alpha, \beta, \gamma \in Q\left(\sqrt{k}\right)$ such that

(3) $$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n .$$

THEOREM 2.

Let K be a number field. If $a,b,c \in K$ and

$$a^{2m} + b^{2m} = c^{2m}$$

with m positive integer then

$$A^{4m} + B^{4m} = C^{4m} ,$$

where A,B,C are matrices of the form

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix} .$$

2. LEMMAS

In the proofs of the theorems we can use the following lemmas:

LEMMA 1

If

$$\begin{bmatrix} r & s \\ ks & r \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R & S \\ kS & R \end{bmatrix}$$

for some $n \geq 2$ then

$$(4) \qquad R = \frac{1}{2} \left[\left(r+s\sqrt{k}\right)^n + \left(r-s\sqrt{k}\right)^n \right] ,$$

and

$$(5) \qquad S = \frac{1}{2\sqrt{k}} \left[\left(r+s\sqrt{k}\right)^n - \left(r-s\sqrt{k}\right)^n \right] .$$

PROOF

In case $n=2$ the Lemma can be seen directly and one can complete the proof by mathematical induction on n.

LEMMA 2

If

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

with integers a,b,c,d, then for every integer $n \geq 2$

$$A^n = \begin{bmatrix} f(a) & b\psi \\ c\psi & f(d) \end{bmatrix},$$

where ψ is an integer,

$$f(a) - f(d) = (a - d)\ \psi$$

and $f(a)$, $f(d)$ are polynomials of degree n.

PROOF

For $n=2$ we have

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) & b\psi \\ c\psi & f(d) \end{bmatrix} ,$$

where $\psi = a+d$. It is easy to verify that

$$f(a) - f(d) = (a-d)\ (a+d) = (a-d)\ \psi .$$

Assume that the Lemma is true for $n=k$, $(k\geq 2)$ that is

$$A^k = \begin{bmatrix} f_1(a) & b\psi_1 \\ c\psi_1 & f_1(d) \end{bmatrix} \qquad \text{and} \quad f_1(a) - f_1(d) = (a-d)\psi_1 .$$

First we have

$$A^{k+1} = A^k\ A = \begin{bmatrix} f_1(a) & b\psi_1 \\ c\psi_1 & f_1(d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(a) & b\psi_2 \\ c\psi_2^* & f_2(d) \end{bmatrix} ,$$

where

$$f_2(a) = af_1(a) + bc\ \psi_1 , \qquad f_2(d) = df_1(d) + bc\ \psi_1 ,$$

(7)

$$\psi_2 = f_1(a) + d\ \psi_1 , \qquad \psi_2^* = a\ \psi_1 + f_1(d)$$

On the other hand

(8) $$A^{k+1} = A\ A^k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(a) & b\psi_1 \\ c\psi_1 & f_1(d) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} af_1(a)+ bc\psi_1 & b\left[a\psi_1+f_1(d)\right] \\ c\left[d\psi_1+f_1(a)\right] & df_1(d)+bc\psi_1 \end{bmatrix} .$$

Comparing the entries of $A^k A$ and $A A^k$ we obtain

$$f_1(a) + d\psi_1 = a\psi_1 + f_1(d),$$

hence by (7) we get

$$\psi_2 = \psi_2^*.$$

From (7) it follows that

$$f_2(a) - f_2(d) = af_1(a) - df_1(d)$$

but

$$f_1(a) = f_1(d) + (a-d)\psi_1.$$

Thus

$$f_2(a)-f_2(d)=a\left[f_1(d)+(a-d)\psi_1\right]-df_1(d)=(a-d)\left[f_1(d)+a\psi_1\right].$$

From (7) we have

$$f_1(d) + a\psi_1 = \psi_2^* = \psi_2,$$

thus

$$f_2(a) - f_2(d) = (a-d)\psi_2$$

what ends the proof.

<u>LEMMA 3</u>.

If a matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

with $n\geq 2$ and integers a,b,c,d satisfies

$$A^n = \begin{bmatrix} R & S \\ kS & R \end{bmatrix},$$

where k is fixed integer such that $k\neq 0$ and $R,S\neq 0$ are integers, then

$$A \in G_2(k).$$

PROOF

From the assumption we have

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R & S \\ kS & R \end{bmatrix},$$

for some $n \geq 2$ and $S \neq 0$.

By Lemma 2 we have

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_1(a) & b\psi_1 \\ c\psi_1 & f_1(d) \end{bmatrix},$$

where

$$f_1(a) - f_1(d) = (a-d)\psi_1.$$

From (9) and (10) we obtain

$$\begin{bmatrix} f_1(a) & b\psi_1 \\ c\psi_1 & f_1(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ kS & R \end{bmatrix}.$$

Thus

$$f_1(a) = f_1(d) = R, \qquad c\psi_1 = kS, \qquad b\psi_1 = S.$$

From this we have

$$f_1(a) - f_1(d) = 0.$$

Since $S \neq 0$, then we obtain

$$\psi_1 \neq 0 \quad \text{and} \quad c\psi_1 = kb\psi_1$$

hence

$$c = kb.$$

On the other hand

$$(a-d)\psi_1 = f_1(a) - f_1(d) = 0.$$

By the fact that $\psi_1 \neq 0$ we get $a=d$ and the proof is complete.

3. PROOFS OF THE THEOREMS.

PROOF OF THEOREM 1.

Assume that $A, B, C \in G_2(k)$ and let

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ ks_1 & r_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} r_2 & s_2 \\ ks_2 & r_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} r_3 & s_3 \\ ks_3 & r_3 \end{bmatrix}$$

such that

$$A^n + B^n = C^n. \tag{11}$$

By Lemma 1 we obtain

$$A^n = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ kN_1 & M_1 \end{bmatrix}, \quad B^n = \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ kN_2 & M_2 \end{bmatrix}, \quad C^n = \begin{bmatrix} M_3 & N_3 \\ kN_3 & M_3 \end{bmatrix},$$

where

$$(12) \qquad \begin{aligned} M_m &= \frac{1}{2}\left[\left(r_m+s_m\sqrt{k}\right)^n+\left(r_m-s_m\sqrt{k}\right)^n\right], \\ N_m &= \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\left(r_m+s_m\sqrt{k}\right)^n-\left(r_m-s_m\sqrt{k}\right)^n\right], \quad m=1,2,3. \end{aligned}$$

Hence by (11) we have

$$(13) \qquad \begin{aligned} M_3 &= M_1 + M_2 \\ N_3 &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

From (12) and (13) we get

$$\left(r_1+s_1\sqrt{k}\right)^n+\left(r_2+s_2\sqrt{k}\right)^n = \left(r_3+s_3\sqrt{k}\right)^n.$$

Putting in the last equality

$$\alpha = r_1+s_1\sqrt{k}, \quad \beta = r_2+s_2\sqrt{k}, \quad \gamma = r_3+s_3\sqrt{k},$$

we obtain

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n,$$

where $\alpha,\beta,\gamma \in Q\left(\sqrt{k}\right)$. Now, let $\alpha,\beta,\gamma \in Q\left(\sqrt{k}\right)$. Then we can write

$$\alpha = r_1+s_1\sqrt{k}, \quad \beta = r_2+s_2\sqrt{k}, \quad \gamma = r_3+s_3\sqrt{k}$$

and

$$\overline{\alpha} = r_1-s_1\sqrt{k}, \quad \overline{\beta} = r_2-s_2\sqrt{k}, \quad \overline{\gamma} = r_3-s_3\sqrt{k},$$

with integers r_m, s_m, $m=1,2,3$.

From the assumption we have

$$\alpha^n+\beta^n=\gamma^n.$$

It is easy to see that

$$(\overline{\alpha})^n+(\overline{\beta})^n=(\overline{\gamma})^n.$$

Thus we obtain

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\left(\alpha^n+\overline{\alpha}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\beta^n+\overline{\beta}^n\right) = \frac{1}{2}\left(\gamma^n+\overline{\gamma}^n\right),$$

and

$$(15) \qquad \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\alpha^n-\overline{\alpha}^n\right) + \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\beta^n-\overline{\beta}^n\right) = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\gamma^n-\overline{\gamma}^n\right).$$

Donote

$$(16) \qquad M_1=\frac{1}{2}\left(\alpha^n+\overline{\alpha}^n\right), M_2=\frac{1}{2}\left(\beta^n+\overline{\beta}^n\right), M_3=\frac{1}{2}\left(\gamma^n+\overline{\gamma}^n\right).$$

$$(17) \qquad N_1=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\alpha^n-\overline{\alpha}^n\right), N_2=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\beta^n-\overline{\beta}^n\right), N_3=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\gamma^n-\overline{\gamma}^n\right).$$

From this and from (14),(15) we have

$$(18) \qquad M_3 = M_1 + M_2, \qquad N_3 = N_1 + N_2 .$$

Consider the matrices A_1,B_1,C_1 of the form

$$A_1=\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ kN_1 & M_1 \end{bmatrix}, \quad B_1=\begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ kN_2 & M_2 \end{bmatrix}, \quad C_1=\begin{bmatrix} M_3 & N_3 \\ kN_3 & M_3 \end{bmatrix},$$

where $N_m \neq 0$, $m=1,2,3$.

By (18) we have

$$A_1 + B_1 = C_1.$$

From the above equality and from Lemma 1 and Lemma 3 we obtain that there exist the matrices A,B,C such that

$$A_1 = A^n , \quad B_1 = B^n , \quad C_1 = C^n$$

and therefore we have

$$A^n + B^n = C^n.$$

Thus A,B,C are matrices of the form

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ ks_1 & r_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} r_2 & s_2 \\ ks_2 & r_2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} r_3 & s_3 \\ ks_3 & r_3 \end{bmatrix}$$

hence $A,B,C \in G_2(k)$, what gives the proof of the Theorem.

<u>PROOF OF THEOREM 2</u>.

Let

$$(19) \qquad A = \begin{bmatrix} r & s \\ as & r \end{bmatrix}$$

then by Lemma 1 we have

$$(20) \qquad \begin{bmatrix} r & s \\ as & r \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R & S \\ aS & R \end{bmatrix},$$

where

$$R = \frac{1}{2} \left[\left(r+s\sqrt{a} \right)^n + \left(r-s\sqrt{a} \right)^n \right],$$

(21)

$$S = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\left(r+s\sqrt{a} \right)^n - \left(r-s\sqrt{a} \right)^n \right].$$

Putting in (21) r=0, s=1 we get

$$R = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{a} \right)^n + \left(-\sqrt{a} \right)^n \right],$$

$$S = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\left(\sqrt{a}\right)^n - \left(-\sqrt{a}\right)^n \right].$$

For n=2k

(22) $\qquad R = a^{\frac{n}{2}}$ and $S=0$.

follows. By (20) and (22) we get

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} = a^{\frac{n}{2}} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similarly we obtain

$$B^n = b^{\frac{n}{2}} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^n = c^{\frac{n}{2}} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For n=4m we have

$$A^{4m} + B^{4m} = a^{2m} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b^{2m} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(a^{2m} + b^{2m}\right) . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = c^{2m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^{4m}$$

and the proof is complete.

From Theorem 2 we get the following Corollary:

<u>COROLLARY</u> (R.Z.Domiaty [3])

If $K=Q$ and $a,b,c \in Z$ then the equation

$$A_a^4 + B_b^4 = C_c^4$$

have infinitely solutions of the form

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

where

$a=\left(m^2-n^2\right).l$, $\quad b=2mnl$, $\quad c=\left(m^2+n^2\right).l$, $\quad m>n$, $\quad (m,n)=1$, $\quad l\geq 1$.

REFERENCES

[1] E.D.Bolker - "Solutions of $A^k+B^k=C^k$ in n×n integral matrices" - Amer. Math. Monthly,75,1968,759-760.

[2] J.I.Brenner and J.de Pillis - "Fermat's equation A^p B^p $=C^p$ for matrices of integers" - Math. Mag.,45,1972,12-15.

[3] R.Z.Domiaty - "Solutions of $x^4+y^4=z^4$ in 2×2 integral matrices" - Amer. Math. Monthly,73,1966,631.

[4] R.Z.Domiaty - "Lösungen der Gleichung $x^n+y^n=z^n$ mit $n=2^m$ im Ring gewisser ganzzahliger Matrizen" - Elem. Math.21,1966,5-7.

[5] P.Ribenboim - "13 lectures on Fermat's last theorem" Springer-Verlag; New York-Heidelberg-Berlin,1980.

CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAI KÍSÉRLET ÖSSZEFOGLALÁSA 1. RÉSZ
AZ EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK. A VEKTOROK.

Néhány évvel ezelőtt az általános iskolai oktatásban polgárjogot nyert a geometria transzformációkkal történő feldolgozása. A 6. osztályban elkezdődik a transzformáció fogalmának kialakítása "Keresd a párját" című fejezetben. Többféle hozzárendelési eljárást vizsgálnak, amelyek közül kiválasztják a tengelyes tükrözést, a középpontos türközést, az eltolást, forgást, tehát az egy és két tengelyű tükrözéseket és ezek segítségével vizsgálják a geometriai alakzatok tulajdonságait. Az ezen eljárásokkal egymásba átvitt alakzatokat, vagyis a síkbeli vagy térbeli mozgatásokkal egymásba átvitt alakzatokat egybevágóknak nevezik. Tovább nem lépnek. Egyrészt nem adják meg a transzformáció általános értelmezését, másrészt a kettőnél több tengelyre vonatkozó tükrözésről nem beszélnek.

Jogos ez, hiszen a tanulókat általános fogalmakkal még nem szerencsés terhelni. Sor kerül még a vektor fogalmának megadására is, mégpedig az eltolásnál a pontokat a képeikkel összekötő nyilak összességeként. A 8. osztályban viszont a középpontos hasonlóságot, mint geometriai transzformációt értelmezik.

Természetesen felvetődik a kérdés, hogy kellene és lehetne a transzformációs szemfeleletet a középiskolában továbbfejleszteni, kiteljesíteni. Úgy gondoltuk, hogy az általános iskolai geometria tananyaga jó alapot nyújt arra, hogy az egybevágósági transzformációknak egy a foglamakat értelmező, rendszeresebb, általánosabb, teljes összefoglalását készítsük el a középiskolai tanulók számára. Ezért is fogtunk hozzá az egri Dobó Gimnáziumban egy kísérlethez, amelyben elképzeléseinket igyekeztünk megvalósítani. Előbb a geometriai leképezések és transzformációk általános értelmezését végeztük el, majd megadtunk egy konkrét leképezést a síkon, amelynek tulajdonságait vizsgálva egyrészt az általános fogalmak konkrétumokkal való megtöltését végeztük el, másrészt kiépítettük vele az egybevágósági transzformációk rendszerét, és ezekkel vizsgáltuk a geometriai alakzatok tulajdonságait. Helyszűke miatt csak a geometriai leképezések és transzformációk fogalomrendszerét, valamint a szóbahozott konkrét leképezés ismertetését végezzük el részletesen. A tananyag további részeinek csak az összefoglalását adjuk és a szemléleti vonatkozásait említjük.

Geometriai leképezések és transzformációk

Tekintsük a nem szükségképpen különböző A és B ponthalmazt.

Értelmezések:

Egy A ponthalmaznak egy B ponthalmazba történő F geometriai leképezésén olyan előírást értünk, amely az A ponthalmaz minden egyes P pontjához a B ponthalmaz valamely P' pontját rendeli. A P pontot eredeti pontnak, a P' pontot képpontnak, a P kezdőpontú P'-be mutató nyilat leképezési nyilnak nevezzük. Továbbá az A ponthalmazt a geometriai leképezés értelmezési tartományának, a képpontok (P'-k) halmazát a geometriai leképezés értékkészletének vagy képhalmazának nevezzük.

Ha a képhalmaz a B valódi részhalmaza, akkor azt mondjuk, hogy az A ponthalmazt a B ponthalmazba képezzük le, ha a képhalmaz éppen a B ponthalmaz, akkor A-t a B-re képezzük le.

Ha a képhalmaz A valódi részhalmaza, akkor A-t A-ba (önmagába) képezzük le, s ha a képhalmaz éppen A, akkor A-t A-ra (önmagára) képezzük le.

Ha egy A ponthalmaznak önmagába vagy önmagára való leképezésénél egy pont képe önmaga, vagyis $P = F(P)$, akkor a P pontot a leképezés fixpontjának nevezzük.

Ha egy A ponthalmaz e egyenese pontjainak képei az e egyenesre illeszkednek, akkor az e egyenest a geometriai leképezés invariáns egyenesének nevezzük.

Ha pedig egy A ponthalmaz α síkja pontjainak képei az α síkra illeszkednek, akkor az α síkot a geometriai leképezés invariáns síkjának nevezzük.

Ha az invariáns egyenes minden pontja fixpont, akkor az egyenest pontonként fixegyenesnek, ha az invariáns sík minden pontja fixpont, akkor azt pontonként fix síknak nevezzük.

Ha az F leképezés esetén egyenes képe egyenes, akkor az F leképezést egyenestartónak, ha sík képe sík, akkor síktartónak nevezzük.

Ha az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való leképezésénél különböző P és Q pontok P' és Q' képei is különbözők, akkor ezt a geometriai leképezést kölcsönösen egyértelmű leképezésnek vagy transzformációnak nevezzük. Jele: T.

A T transzformációnál B minden egyes pontja A egyetlen pontjának képe. Ha most a képpontokhoz az eredeti pontokat rendeljük hozzá, akkor B-nek A-ra való transzformációját értelmezzük. Ezt a T transzformáció inverzének nevezzük. Jele: T^{-1} .

Leképezések összetétele

Legyen A, B, C három nem szükségképpen különböző ponthalmaz. Képezze le F_1 leképezés A-t a B-be, F_2 leképezés B-t a C-be.
Az F_1 és F_2 leképezések egymás utáni alkalmazásával A-t a C-be képezzük le.

Értelmezés: Az F_1 és F_2 leképezések egymás utáni alkalmazását az F_1 és F_2 leképezések összetételének vagy szorzatának nevezzük.
Jele: F_2F_1 . ($P'' = F_2(P') = F_2F_1(P)$, ahol P az A, P' a B és P'' a C ponthalmaz eleme.)

Értelmezés: Az olyan leképezést (vagy leképezések összetételét), amelynél minden pont fixpont azonos vagy identikus leképezésnek nevezzük. Jele: I.

Értelmezés: Az F_1 és F_2 leképezéseket (akár összetett leképezéseket is) akkor nevezzük egyenlőknek, ha minden $P \in A$-ra $F_1(P)=F_2(P)$, ahol $F_1(P), F_2(P) \in B$.
Jele: $F_1 = F_2$.

Transzformációcsoport. (Olvasmány)

Képezze le F_1 az A-t B-be, F_2 a B-t C-be, F_3 a C-t D-be, ahol A,B,C,D ponthalmazok.

Az F_2F_1 szorzatleképezés P-hez P''-t az F_3 P''-höz P'''-t rendeli, vagyis az $F_3\left(F_2F_1\right)$ szorzatleképezés a P-hez a P'''-t rendeli.

Az F_1 leképezés P-hez P'-t, az F_3F_2 szorzatleképezés a P'-höz a P'''-t rendeli, vagyis az $\left(F_3F_2\right)F_1$ szorzatleképezés a P-hez ugyancsak a P'''-t rendeli. A két leképezés tehát egyenlő, vagyis

$$F_3\left(F_2F_1\right) = \left(F_3F_2\right)F_1 ,$$

ami azt jelenti, hogy a leképezések szorzata csoportosítható: másképpen a leképezések szorzata asszociatív tulajdonsággal rendelkezik.

Tekintsük egy A ponthalmaz önmagára történő transzformációinak összességét. Ezekre az alábbi tulajdonságok érvényesek:

- Ha T_i és T_j az összességbeli két tetszőleges transzformáció, akkor a T_iT_j szorzat is az összességhez tartozik, vagyis transzformáció.
- E szorzatra fennáll a $\left(T_iT_j\right)T_k = T_i\left(T_jT_k\right)$ tulajdonság. (Asszociatív)
- A transzformációk összessége a transzformációk inverzeit is tartalmazza.
- Az identikus transzformáció is eleme az összességnek.

A szóbanforgó összességre érvényesek az un. csoporttulajdonságok, ezért a transzformációk ezen összességét tranformációcsoportnak nevezzük.

A geometriai leképezésre most tehát egy konkrét példát mutatunk be, melyről kimutatjuk, hogy tranformáció, és ezen transzformáció segítségével fogjuk vizsgálni néhány geometriai alakzat tulajdonságait.

Értelmezés: Geometriai alakzaton pontok, egyenesek és síkok meghatározott összességét értjük.

Tengelyes tükrözés

Legyen az A ponthalmaz egy sík pontjainak halmaza. A sík minden egyes pontjához rendeljük hozzá ugyanezen sík valamely pontját a következő eljárással: Vegyünk fel a síkon egy tetszőleges t egyenest, és a sík tetszőleges P pontjához a P-ből a t-re bocsátott merőlegesnek azt a P-től különböző P' pontját rendeljük, amelynek t-től való távolsága egyenlő P-nek t-től való távolságával; míg a t minden egyes pontjához önmagát rendeljük.

A sík minden egyes pontjához hozzárendeltük ugyanezen sík egy pontját a leírt eljárással, tehát geometriai leképezést értelmeztünk, amit egyenesre vonatkozó tükrözésnek, vagy tengelyes tükrözésnek nevezünk.
Jele: T_t .
P eredeti pont, P' képpont, t a tükrözés tengelye.
A leképezés értelmezési tartománya a sík pontjainak halmaza.
Könnyen belátható, hogy a sík bármely pontja képpont is. Tudniillik az a pont, amely a t-től ugyanakkora távolságra van, mint a szóbanforgó pont, de tőle különbözik. A tengely pontjai pedig önmaguk képei.
A leképezés értékkészlete tehát a sík pontjainak halmaza.

A tengelyes tükrözés tehát a síknak önmagára történő geometriai leképezése.

A tengelyes tükrözés tulajdonságai:

1. A tengelyes tükrözés transzformáció.
2. A tengely pontjai mind fixpontok, más fixpontja nincs a tengelyes tükrözésnek.
3. Ha P nem illeszkedik a tengelyre ($P \notin t$), akkor a tengely a P-t a P'-től elválasztja. A tengelyes tükrözés a tengely által meghatározott félsíkokat felcseréli.
4. Ha P képe P', akkor P' képe P. Tehát képpontokhoz az eredeti pontokat ugyanazon t-re vonatkozó tükrözés rendeli. A tengelyes tükrözés inverze ugyenezen tengelyes tükrözés.
5. Egyenes tükörképe egyenes.

   a/ Ha e_1 metszi a tengelyt, ugyanott metszi azt a képe is (fixpont).

   b/ Ha e párhuzamos t-vel, akkor képe párhuzamos e-vel és t-vel.
6. A tengelyre merőleges egyenesek invariánsak, invariáns (pontonként fixegyenes) még a tengely is.

A felsoroltakon kívül más invariáns egyenese nincs a tengelyes tükrözésnek.

7. A tengelyre merőleges egyeneseknek nincs közös pontjuk.
8. Szakasz képe szakasz, méréssel megállpíthatjuk, hogy a szakasz és képe egyenlő hosszúságú. (Ezt majd úgy fejezzük ki, hogy a tükrözés szakasztartó.)

9. Szög képe szög, méréssel megállapíthatjuk, hogy a szög és a szög képe egyenlő nagyságú. (A tükrözés szögtartó.)
10. A tengelyes tükrözésnél az alakzat és képe körüljárási iránya ellentétes.
11. Két egyenes metszéspontjának képe a két képegyenes metszéspontja.

Megjegyzés: 1. A tengelyes tükrözésnél az alakzat és képe síkbeli mozgatással nem hozható fedésbe egymással, csak a tengely körüli térbeli átforgatással.

2. A temgelyes tükrözést a tengely vagy egy megfelelő (nem fix) pontpár meghatározza. A tengelyes tükörzés tulajdonságainak összegyűjtésekor a tanulók érdeklődésére is építve sikerült az általános fogalmaknak a konkrét megfelelőit megtalálni.

Ezután már természetesebbek, érthetőbbek lettek azok. A fogalmak mélyebb elsajátításához célszerűnek tűnt az is, hogy mutassunk meg a síkon olyan geometriai leképezést is, amely nem transzformáció. Például a síkon felvettünk egy egyenest, és a sík minden egyes pontjához hozzárendeltük a pontból az egyenesre bocsátott merőlegesnek az egyenessel való metszéspontját. E leképezés vizsgálata is jól mutatta, hogy a fenti általános fogalmak oktatása az I. gimnáziumiban nem okoz gondot.

A további tananyagot a háromszög, a trapéz, a téglalap, a négyzet, a deltoid és a rombusz előállításának és tulajdonságainak tengelyes tükrözéssel való vizsgálata képezte.

A mértani helyek tárgyalásakor is használtuk a tengelyes tükrözést. Mértani helynek a sík (tér) adott tulajdonságú pontjainak halmazát neveztük. Szerkesztési alapelemnek tekintettük a pontot, az egyenest és a kört, s kerestük az egy szerkesztési alapelemtől adott távolságra levő pontok mértani helyét, majd a két, illetve három szerkesztési alapelemtől egyenlő távolságra levő pontok mértani helyét. Közben kerestük az egy szerkesztési alapelemet érintő adott sugarú körök középpontjainak, illetve a két és három szerkesztési alapelemet érintő körök középpontjainak mértani helyét. Amellett, hogy ez a feldolgozás rendszerességre, teljességre szoktat, sok hasznát vettük később ennek a harmadik osztályban a koordinátageometria tárgyalásánál.

A továbbiakban a sík önmagára történő újabb leképezéseit értelmeztük.

A forgást két, egymást egy Q pontban metsző t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetételeként. Jele: $F = T_{t_1} T_{t_2}$. A forgás segítségével a szög, a kör, a középponti és kerületi szög, a Thales-tétel a húr-, és érintő négyszögek vizsgálata volt elvégezhető. A pontra vonatkozó tükrözés -- két, egymást egy Q pontban merőlegesen metsző t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele (Jele: T_O) -- a paralelogramma előállításában és tulajdonságainak vizsgálatában kapott szerepet. Ezzel vizsgáltuk a háromszögek, négyszögek középvonalait.

Az eltolás -- a párhuzamos t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele (Jele: $E = T_{t_1} T_{t_2}$) -- a paralelogrammák tulajdonságainak vizsgálatánál és két kör közös érintőinek vizsgálatánál játszott szerepet.

A fenti három transzformációt azért érdemes így értelmezni, mert ezek tulajdonságainak jó részét a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból közvetlenül is leovashatjuk.

A kettőnél több tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés összetételének vizsgálata érdekében a következő állítást igazoltuk. A tengelyes tükrözéseknek létezik olyan véges sorozata, amely egy adott "a" egyenes által meghatározott és előre kijelölt α_1 félsíkot és az "a"-ra illeszkedő adott A kezdőpontú adott a_1 félegyenest, az adott "b" egyenes által meghatározott és előre kijelölt β_1 félsíkba, és a "b"-re illeszkedő adott B kezdőpontú adott b_1 félegyenesbe visz át. A bizonyítás során kiderült, hogy ehhez legfeljebb három tengelyre történő tükrözés egymásutánjára van szükség. Az első tengely az AB szakasz felezőmerőlegese, a második az a_1^* és b_1 szögfelezője (ahol a_1^* az a_1 első tengelyre vonatkozó tükörképe), a harmadik pedig a b egyenes, ha egyáltalán ezekre esetenként szükség van. A tengelyes tükrözések olyan véges sorozatát, amely adott félsíkot, és a félsíkot meghatározó egyenes adott kezdőpontú adott félegyenesét ugyanilyen előre megadott alakzatba viszi át <u>egybevágósági transzformációnak</u> neveztük. Ennek alapján, ha a tükrözések véges sorozata egy tengelyre vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető, akkor <u>tengelyes tükrözés</u>, ha két tengelyre vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető, akkor <u>forgás</u>, <u>pontra vonatkozó tükrözés</u> vagy <u>eltolás</u>, ha három tengelyre vonatkozó tükrözéssel heyettesíthető, akkor <u>csúsztatva tükrözés</u> az egybevágósági transzformáció. (Ez utóbbi azért kapta ezt az elnevezést, mert három tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele egy eltolás és egy tengelyes tükrözés összetételével helyettesíthető.)

Két geometriai alakzatot pedig akkor neveztünk egybevágónak, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Bebizonyítottuk a háromszögek egybevágóságára vonatkozó tételeket, vagyis adott feltételek mellett megmutattuk, hogy létezik olyan egybevágósági transzfromáció, amely egyik háromszöget a másikba átviszi. Sőt megmutattuk minden esetben, hogy melyek azok az egybevágósági transzformációk, amelyek az egyik háromszöget a másikba vitték.

Az első éves tananyag jelentős fogalma volt a vektor, amely a középiskolai tananyag további tárgyalásának nagyon fontos eszköze. Az eltolásnál a pont és képe úgynevezett eltolási nyilat határoz meg. Egy eltolás esetén ezek egyenlő hosszúságúak és egyező irányúak. Ha d-vel jelöljük a két párhuzamos tengely távolságát, akkor a leképezési nyilak hossza 2d. (Egy leképezési nyil az eltolást meghatározza.)

Az ugyanazon eltolást előíró (meghatározó) eltolási nyilak összességét (halmazát) vektornak neveztük, s azt egy tetszőleges elemével adottnak tekintettük. A vektor tehát egy végtelen sok elemű halmaz, és bármelyik leképezési nyil reprezentálja. Persze végtelen sok eltolás lévén, a vektorok halmaza is végtelen sok elemű halmaz.

Mivel két eltolás összetétele eltolás, ezért két vektor összegén azon vektort értettük, amely a két összetevő eltolás eredő eltolását határozza meg. (Több, véges sok összeadandóra is értelmeztük a vektorok összeadását.)

Az eltolás segítségével értelmeztük az ellentett vektort, a nullavektort, a vektor számszorosát, számmal való osztását és az egységvektort. Vizsgáltuk a számmal való szorzás tulajdonságait. A térszemlélet idejében történő fejlesztése érdekében a síkra vonatkozó tükrözést is értelmeztük. Külön foglalkoztunk a két párhuzamos síkra történő tükrözés összetételével (a tér eltolása), amelynek segítségével bevezettük a térbeli vektor fogalmát. Nyilvánvaló, hogy értelmeztük a térbeli vektorok összeadását, számmal való szorzását és azok tulajdonságait is. (Ez zömében a síkbeli gondolat ismétlése.)

Végül a továbbtanulást maguk elé célul tűző tanulók számára a vektortér fogalmát is megadtuk.

Ha R a valós számok halmaza és V egy nem üres halmaz, akkor a V halmazt a valós számok feletti vektortérnek nevezzük, ha teljesülnek rá a következők.

I. A V halmazon értelmezve van az összeadás művelete és minden

$\underline{a}, \underline{b} \in V$ -re $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$;

minden $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ -re $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$;

a V-ben van olyan elem -- jelöljük $\underline{0}$ -val, hogy minden $\underline{a} \in V$ -re

$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$;

a V halmaz minden $\underline{a} \in V$ elemmel együtt tartalmaz olyan $\underline{-a}$ -val jelölt elemet is, hogy

$$\underline{a} + (\underline{-a}) = \underline{0} .$$

II. Az R és V elemei között legyen értelmezve egy RXV leképezés.

Az $(\alpha, \underline{a})$ párhoz rendelt V-beli elemet jelöljük $\alpha . \underline{a}$ -val,

$(\alpha \in R, \underline{a} \in V)$, és elvárjuk, hogy a leképezés teljesítse az alábbi tulajdonságokat: minden $\alpha, \beta \in R$ és $\underline{a} \in V$ esetén

$(\alpha \beta)\underline{a} = \alpha(\beta \underline{a})$;

minden $\underline{a} \in V$ -re $1 . \underline{a} = \underline{a}$;

az R-beli összeadásra legyen disztributív $(\alpha+\beta) \underline{a} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{a}$;

és a V-beli összeadásra legyen disztributív

Ezt skalárral való szorzásnak hívjuk. $\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$.

Az általunk értelmezett vektorok halmaza e tulajdonságoknak eleget tesz, ezért a vektorok halmaza a valós számok feletti vektortér.

Megjegyzések:

Az egybevágósági transzformációk egységes szellemben történő tárgyalása a tanulók feladatmegoldó teljesítményét megnövelte. Érdekes volt tapasztalni, hogy az Arany Dániel versenyen olyan megoldást is adtak tanulóink, transzformáció segítségével az egyik feladatra, amely a megoldó kulcsban nem szerepelt. Jó szolgálatot tett a vektor fogalma a fizika oktatásában is.

Végül köszönetemet fejezem ki a Dobó István Gimnázium és Szakközépiskola vezetőinek a kísérlet lefolytatásának lehetőségéért és támogatásukért.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Az érvényben levő általános iskolai tanterv.
2. Az érvényben levő középiskolai tanterv.
3. A forgalomban levő általános iskolai tankönyvek.
4. A forgalomban levő középiskolai tankönyvek.
5. Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó 1960.
6. Dr. Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó 1974.
7. Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal. Egyetemi doktori disszertáció 1977.

BALOGH VIKTÓRIA

MATEMATIKA TAGOZATOS ÁLTALÁNOS ISKOLAI 5.- 8. OSZTÁLYOK KÍSÉRLETI TANTERVÉRŐL ÉS A KÍSÉRLET TAPASZTALATAIRÓL

Abstrakto: La unua parto de laboraĵo konigas la demandojn de orgazizoj kaj instruplanoj pri la matematikaj spescialigitaj klasoj, kiuj funkcias en kelkaj, eksperimentaj bazlernejoj. Tiun instruformon oni estigis por matematiko interesemantoj, por efika okupiĝo de kapablaj gelernantoj. En tiuj specialigitaj klasoj ni aplikas unua foje la kalkulmaŝinojn kaj personalkomputilojn difinite iliajn studmateriojn kaj la nombrojn de iliaj studhoroj en la instruplano.
La dua parto de laboraĵo prezentas la rezultojn de eksperimento laŭ la temorondoj kaj laŭ la klasoj.

I.

A tehetséges tanulók időbeni felfedezése és gondozása igen fontos feladata az iskolai oktatásunknak. Ezt segítik a különböző szervezésű szakkörök, a fakultációk, -- de kedvezőbb lehetőséget biztosíthatnak a tagozatos osztályok, mert egyrészt beépülnek az iskola óratervébe, órarendjébe, másrészt tantervével és követelményrendszerével a legszervezettebb és legátfogóbb programot adja a tanulóknak 4 éven keresztül.

Heves megyében az 1981/82. tanévtől a Művelődési Minisztérium engedélyével (MM. 31 862/1981. ü. sz.) négy általános iskola kezdte meg kísérletként a matematika tagozatos kiegészítő tanterv tanítását.
A kiegészítő tantervet helyileg kezdeményeztük. A tehetséges tanulókkal való külön törődés gondolatát fogalmaztuk meg a kiegészítő tanterv célkitűzésében, osztályonkénti tananyagában, követelményrendszerében és a tanterv módszertani ajánlásaiban.

Egerben a 4. sz. gyakorló iskolában és a 7. sz. iskolában, Erdőtelken, továbbá Heves 2. sz. általános iskolájában -- általában saját iskolájukból "válogatott" 25-26 fős önálló tanulócsoportokkal -- megszervezték a tagozatos 5. osztályokat. Kezdetben heti 2-2 órával, majd a ciklusonkénti tervezés időszakától ciklusonkénti 3 órával azaz évi 56 órával emelkedett tanulócsoportonként a tanulók matematika óráinak száma ezekben az osztályokban. Ez, négy év alatt 224 óratöbbletet jelent.

Főiskolánkat közelebbről érinti a 4. sz. gyakorló iskolában létrehozott matematika tagozatos osztályok szervezési és tartalmi kérdése, ezért megemlítem a kísérlet szervezésének kezdeti gondjait: Első években a matematika tagozat a tanulók "második vonalából" alakult, mert az angol tagozatra már korábbi válogatás megtörténik a 3. osztályban. Így a "maradék" két tanulócsoportból csak a matematika órákra váltak szét a tagozatos tantervvel és a "normál" tantervvel tanulók.
Örvendetes, hogy az elmúlt két tanévban már Eger város más iskoláiból is kérte kb. 10-12 szülő, hogy gyermekük az 5. osztálytól tagozatos osztályba nyerhessen felvételt. Ezzel a tagozatos osztály működésének, és létezésének felismerése fejeződött ki -- s kezdi betölteni hivatását, vagyis a tehetséges tanulóknak közös tanulócsoportba való gyűjtését. A város iskoláiból átíratkozott tanulók valóban tehetségesek, jóképességűek, s ezzel emelték az osztályban folyó munka feltételeit és eredményeit. A megye többi kísérletező tagozatos osztállyal rendelkező iskolájában is megkezdődött a matematika tagozat iránti érdeklődés a szülők és tanulók körében. Így Heves körzeti iskola -- általános iskolai kollégiuma, mint jó lehetőséggel segíti a körzet tanulóinak felvételét, Erdőtelekre pedig autóbusszal járnak a tanulók a környező községekből.

A matematika tagozatos tantervnek nem célja és nem feladata a középiskolák tananyagának megtanítása. Az alaptanterv törzs- és kiegészítő anyagát mélyíti el, valamint azokat az "új" anyagrészeket veszi fel a tantervbe, amelyek ezt elősegítik, illetve biztosítják. A kísérleti iskolákban jó kapcsolat alakult ki a matematika munkaközössége és az alsótagozat munkaközössége között. Ennek eredményeképpen javult a tanulók szövegértelmező képessége, önállósága, a matematika nyelve iránti fogékonysága, javult az írásbeli munka színvonala. Ezeket különböző módszerekkel, szervezett foglalkozásokkal is segítették (pl.: feladatmegoldó bajnokság, matematikai-klubok, felkészítő tanfolyamok, alsós-szakkörök stb.).

Az 1983/84. tanévtől a tanterv kiegészítő módosítása vált szükségessé.
Ennek okai: 1. a szabad szombatok, amelyek óraszámváltozsát okoztak,
2. a fakultáció,
3. az általános iskolai matematika tantervek "korrekciója" és új oktatási segédanyagok (feladatrendszerek) megjelenése.

Az 1984/85. tanévben zártuk le az első négyéves kísérletet, amelynek tapasztalatai egyértelműen bizonyították, hogy a tagozatos tanterv jól szolgálja a tehetséges tanulók felkészítését, segítését.
Minden kísérletező iskola nevelőjének egyöntetű véleménye, hogy a megadott órakeretben a tagozatos tantervi kiegészítő anyag teljesíthető és időt biztosít megfelelő gyakorlásra is.
A tagozatos tanterv és a követelményrendszere jól illeszkedik az alaptantervhez, a kiegészítő anyag beépítése nagyban segíti a tanulók elmélyültebb matematikai ismeretszerzését.
A tanterv módosítás nyomán több időt adtunk a következő témakörökre:
5. osztályban a tört fogalmának és a törtekkel végzett műveleteinek feldolgozására, az "adott tulajdonságú" pontok keresése témakörre, s ugyanakkor csökkenthettük a nem tizesalapú számrendszerek tanítására szánt időt. 6. osztályban a racionális számokkal végzett műveletek és függvények feldolgozása, 7. osztályban a kominatórika és valószínűség fogalom elmélyítésére. 8. osztályban a kiegészítő anyagban szereplő modern algebrai rész feldolgozása nagyon érdekesnek tűnt a tanulóknak, -- amely a függvények, a geometriai transzformációk stb. egységes vizsgálatát adja.
Kolláth József, kísérletező tanár így ír erről évvégi jelentésében: "A matematika szemléletformálásban lényeges lépés a művelet fogalmának általánosítása, a struktúrákban való gondolkodás, a struktúrák tulajdonságainak vizsgálata. Felépítve az általános iskolai tagozatos tananyagot - méltó megkoronázását jelenti."

A zsebszámológépek használata a tagozatos tantervű osztályokban ma már elengedhetetlen. Ez nemcsak a "divat szerinti igény", hanem a gyakorlat is megköveteli. A tanulók 70-80 %-ának van saját zsebszámológépe. Nagyon fontos gyakorlati eredmény, ha ezek használatának módszerét, a gép "képességei" megismerésének eljárást, a gép helyes használatát -- az alkalmazható programokkal és algoritmusokkal -- jól ismerik meg a tanulók. A zsebszámológép alkalmazása segíti a tanulók számolási készségét, a műveletek előrebecslésével, a kerekített értékekkel való számolással, a feladatok egészére vonatkozó programok megtervezésével. Útmutatót állítottam össze a tanárok számára a zsebszámológépek felhasználására, hogy hogyan illesszék be az egyes témakörök feldolgozásába a zsebszámológépet. Megnövekedett a függvények, egyenletek, felszín és térfogatszámítás témakörökben a zsembszámológép alkalmazásával az órákon megoldott feladatok száma, így a matematikai összefüggéseket jobban felismerik és elsajátítják a tanulók.

A személyi számítógépek használatával más a helyzet. A tagozatos matematika tanterv az egyedüli rendszerbe foglalt, pontos óraszámot és tananyagot megjelölő tanterv, amely számítástechnikai anyagot is tartalmaz - tudatos, jó egymásraépültséggel. Osztályonkénti 10-10 óra a számítástechnikával kapcsolatos elméleti tananyag feldolgozására elegendő. A gyakorlatok megszervezésére azonban gépek kellettek. Megyénkben a négy kísérleti iskola ma már hat-nyolc személyi számítógéppel rendelkezik (a főiskolai gyakorló tizenegy-gyel) -- amelyet az illetékes művelődési osztályok, illetve a Tanárképző Főiskola vásárolt meg részükre.

A számítógépek oktatási eszközként való felhasználása bizonyos változást jelent a taulásban és a tanításban. Az eszközrendszer lehetővé teszi a tanítási folyamat irányítását is. A folyamatok és jelenségek a számítógép segítségével dinamikusan és folyamatosan állíthatók elő, vagyis a demostrációt szolgálja és ezzel segíti a fogalmak mélyebb megismerését. Alkalmas a gép arra is, hogy a tanulók számára gyakorló partnerként szolgáljon. Tanítási órákon jelentős plusz motivációt váltott ki a számítógép és az eredményesebb, fegyelmezettebb munkát támogatta.

A kiegészítő tanterv módosításával egyidőben -- 1983/84. tanévtől -- a a Művelődési Minisztérium javaslatára a kísérletet kiterjesztettük országos szintre.
Az új belépő iskolák nevelőinek felkészítését az Országos Pedagógiai Intézeben tartottuk, ugyanis a kísérlet gondozója az OPI. 1984/85. tanévben 11 iskola, az 1985/86. tanévben 25 iskola kapott engedélyt a tagozatos tantervű osztályok kiépítésére. Így jelenleg közel 50 iskolában folyik az országban tagozatos tanterv szerint oktatás.
A megyénk iskoláiban tanító kartársak továbbképzését az új feladatok ellátására megszervezük; -- kétéves tanfolyammal sajátították el a személyi számítógépekkel kapcsolatos programnyelvet és programkészítést.

II.

Évenként részletes jelentésben elemezzük a kísérlet tapasztalatait, a tanulók tudását, a szervezési kérdéseket és feladattal járó kérdéseket. Összefoglaló felmérésekben kiemeltünk néhány tantervi anyagrészt, amelyet a tanulók tudásának viszgálatára végeztünk. A tanterv tananyagát lefedő feladatokkal, tanári felmérésekkel és évvégén egységesen szerkesztett feladatsorokkal is végeztünk vizsgálatokat. A továbbtanuláshoz is elengedhetetlen öt témakörban az alábbiakban összegezhetjük -- osztályonként -- a tanulók százalékos eredményeit:

I. Számforgalom alakulása:

5. osztályban:

- az egész számok, törtek (pozitív és negatív törtek) szemegyenesen való ábrázolása 90-97-100 %-os;
- a tizedestörtek ismerete, törtek különféle alakja és nagyságviszonyának ismerete 81-82 %-os;
- mértékek átírása tizedestört alakba (tömeg, idő, terület stb. mértékeknél) 74-76 %-os;

- számok átírása más számrendszerekbe 58-65 %-os eredményű.

6. osztályban:

- számok törzstényezős alakja, legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének meghatározása 90-92 %;
- a számok halmazokba rendezése oszthatósági szabályok és kongruencia alapján 68-85 %-os;
- számok közelítő értékének (alsó- és felső határoknak) ábrázolása a számegyenesen 72 %-os eredményű.

A feladatok többségében a számadatokat összefüggésükben és különböző alakjukban (tört, tizedes tört, százalékalak, arány, hányados, egyenlet gyöke, törtnek törtrésze stb.) adjuk meg. Az ilyen összetett feladatok eredménye is 70-84 %-os.

7. osztályban: Tovább bővül a tanulók számfogalma.

- A számok hatványa és négyzetgyöke, táblázattal: 71-78 %-os;
- a számok normálalakjának felírása 66 %-os;
- a végtelen tizedestört felírása két egész szám hányadosaként 75 %-os;
- a számok felírása primtényezős alakban, s ebből a legnagyobb közös osztó, illetve a legkisebb közös többszörös meghatározása 80 %-os eredményű.

8. osztályban:

- az algebrai kifejezések számértékének kiszámítása, amely a törtekre, százalékszámításra, arányra vonatkozó aritmetikai ismereteket is viszgálja, 71-73 %-os eredményű.

II. Műveletek különböző számhalmazokban

5. osztályban:

- egész számok összeadása és kivonása 75-85 %-os;
- törtekkel műveletek, törtek szorzása, osztása egész számmal; egyszerűsítésük és bővítésük 82-85 %-os;
- törtek összeadására, kivonására vonatkozó nyitott mondatok (egyenletek és egyenlőtlenségek) megoldása 58-62 %-os;
- tizedestörtekkel műveletek, osztásuk egész számmal 73-85 %-os;
- különböző számrendszerekben adott számokkal a négy alapművelet elvégzése 55 %-os eredményű.

6. osztályban:

- racionális számkörben műveletek 83 %-os;
- műveleti azonosságok alkalmazása, műveleti eljárások egyszerűsítése 90-83 %-os;
- műveleti azonosságok tört számokkal és tizedes törtekkel 74 %-os;
- műveleti eredmények előrebecslése 84 %-os;
- felírt nyitott mondatok (azonosságokkal) megoldása 66 %-os;
- törtekkel műveletek, törtrész kiszámítása 79-86 %-os eredményű.

7. osztályban:

- algebrai kifejezésekkel műveletek és azonosságok 68-76 %-os eredményűek, de 91-100 %-os teljesítményt is tapasztaltunk;
- algebrai kifejezések számértékének kiszámítása 75 %-os;
- hatványazonosságok alkalmazása feladatokban 88 %-os eredményű.

8. osztályban:

- algebrai kifejezések számértékeinek kiszámítása kapcsán mértük a tanulók műveletvégzését a különböző számhalmazokban, amely 72-73 %-os eredményű.

III. Szöveges feladatok, egyenletek, -- logikai feladatok

5. osztályban:

- egyszerű szöveges egyenletek felírása és megoldása 55-77 %-os;
- összetett szöveges feladatok megoldása más-más módszerrel 67 %-os;
- százalékkal csökkentett, illetve növelt érték meghatározása 81 %-os;
- logikai kijelentések vizsgálata aritmetikai, oszthatósági és geometriai fogalmakról, elemek halmazokba rendezése 87-96 %-os eredményű.

6. osztályban:

- szöveg alapján nyitott mondat felírása és megoldása 76-82 %-os;
- összetett százalékszámítási feladatok -- összekapcsolva mozgási problémával 63 %-os eredményű.

7. osztályban:

- egyenletek megoldása algebrai és grafikus úton 70-95 %-os;
- szöveges egyenlet felírása és megoldása 65-73-75 %-os;
- törtes egyenletek -- exponenciális egyenlet is -- 88-93 %-os eredményű, -- az utóbbi 52 %.

8. osztályban:

-
- Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása 74-75 %-os;
- szöveges egyenletek felírása és megoldása 75-84 %-os eredményű.

IV. Grafikonok, függvények, sorozatok

5. osztályban:

- pontok helye a koordináta rendszerben, megoldások jelzőszámokkal (háromszög terület problémával kiegészítve) 66-74 %-os;
- mozgás-grafikonok készítése, értelmezése 82 %-os;
- lineáris függvény képletének felírása és ábrázolása koordináta rendszerben 70 %-os;
- sorozatképzés szabályának felismerése, a sorozat tetszőleges elemének meghatározása 83 %-os eredményű.

6. osztályban:

- függvények táblázatának elkészítése, majd ábrázolása, a függvény grafikonjának jellemzése 79-91 %-os, sőt 95 %-os;
- arányossági feladatok szöveges feladatok alapján 74-87 %-os;
- arányossági feladatok geometriai alkalmazással (szögszámítás) 90 %-os;
- számsorozatokról szóló szöveges feladatok megoldása egyenlettel 69 %-os eredményű.

7. osztályban:

- lineáris függvények, két függvény ábrázolása közös koordináta rendszerben, azok vizsgálata 70-95 %-os;
- sorozatok felírása, a képzés szabályának meghatározása, valahányadik elem felírása 73-82 %-os;
- sorozatok (számtani és mértani sorozatok) összegének kiszámítása adott adatokkal 68-75 %-os, összefüggésekkel adott adatok esetén 37-52 %-os;
- mértani sorozat elemeinek összege 49 %-os eredményű.

8. osztályban:

- függvény fogalom, a függvény ábrázolása 81-87 %-os;
- függvényekkel megoldható feladatok 85 %-os eredményű.

V. Geometria

5. osztályban:

- összetett feladatok megoldása közös tulajdonságú ponthalmazokra (mértani helyek fogalma) 52-83 %-os;
- síkidomok tulajdonságai, összefüggések ismerete 71 %-os;
- négyszögek rajzolása, szögmérés, kerület és területszámítás, téglalap és háromszög területének összefüggése 63-71-93 %-os;
- egyszerű testek felszíne és térfogata 60 %-os;
- kocka és téglatest felszínének és térfogatának meghatározása összefüggések alapján 79-85 %-os eredményű.

6. osztályban:

- merőleges egyenesek, szögszerkesztések, -- háromszögek szerkesztéséhez kapcsolva 67-76 %-os;
- mértani helyek alkalmazása szerkesztésekben 64 %-os;
- sokszögek szögei speciális adatokból (külső szögek, belső szögek összege alapján) 41-56 %-os;
- sokszögek, területének kiszámítása, téglalap területére való visszavezetéssel 84 %-os,
- háromszögek, húrtrapézok, deltoidok szerkesztése, körülírható kör sugara, átló, és más adatokból, majd kerület és terület kiszámítások 67-79-84-90 %-os eredményűek.

7. osztályban:

- szakasz és szög meghatározása algebrai összefüggés alapján 92 %-os;
- sokszög előállítása tükrözéssel (pontra), a kapott alakzat kerülete, területe 71 %-os;
- euklideszi-szerkesztések: magasságvonal, súlyvonal adatokkat 65 %-os, a körülírható kör sugár adattal 86 %-os, látószög meghatározása 55 %-os, de vannak 83-84-90 %-os eredmények is;
- mértani hely a szerkesztésekben 91 %;

- Thalész-tétel alkalmazása szerkesztésekben 64 %-os;
- Pithagorasz-tétel alkalmazása feladatokban 77-90 %-os,
- nagyítás aránya alapján az alakzat megszerkesztése, a kerületének, területének meghatározása 55 %-os;
- szöveges geometriai feladatok (elemzést és diszkussziót igénylők) 47-88 %-os;
- bizonyítási feladatok 52-68 %-os;
- sokszögek szerkesztése kerülete, területe, átlói és szögei 84 %-os eredményűek.

8. osztályban:

- geometriai szerkesztések (különféleképpen adott adatok alapján) 72-88 %-os;
- geometriai számítások (kúp, gúla, henger, gömb stb.) felszín- és térfogatszámításai 59-74 %-os eredményű.

VI. Kombinatórika, valószínűségi feladatok

5. osztályban:

- relatív gyakoriság meghatározása 88 %-os;
- bonyolultabb összefüggéssel megfogalmazott relatív gyakoriság és valószínűség meghatározása 54 %-os;

6. osztályban:

- kombinatórikai feladatokban az összes lehetőségek előállítása 87 %-os;
- adatok megváltoztatása, kombinatórikai problémák felismerése 70-92 %-os eredménnyel.

7. osztályban:

- a valószínűségi feladatokat 79-84 %-os eredménnyel oldották meg.

ÖSSZEFOGLALVA:

Az adatok elemzése mutatja, hogy a tanulók a tantervi feladatokat 68 - 75 - 80 - 85 - 92 %-okkal teljesítik, pedig a felmérő feladatok általában összetettek, "normál"-tantervű osztályokban ezek egy részét nem volna célszerű kitűzni.
A tanterv kiegészítő anyagára utaló feladatokat (exponenciális egyenlet, mértani sor stb.) is már 49 - 55 - 63 %-os eredménnyel oldják meg, a diszkutálást, bizonyítást igénylő feladatokat is szép eredménnyel 47 - 52 - 68 %-kal oldották meg a tanulók.

A kartársak figyelemmel vannak a tanulók egyéni képességeinek fejlesztésére, differenciálására, teljesítményeik formálására.
Megyénk tagozatos tantervű 15 tanulócsoportjában az évközi felmérések érdemjegyekben kifejezett átlagai az 1984/85. tanévben a következőképpen alakultak:

	5. osztály	6. osztály	7. osztály	8. osztály
Eger 4. sz. gyak.	3,42	3,59	3,7	4,11
Eger 7. sz. isk.	3,35	3,7	3,88	3,9
Erdőtelek	3,76	3,4	----	3,6
Heves 2. sz. isk.	3,46	3,98	3,84	3,66

Az évvégi osztályzataik átlaga ettől jobb, mivel a szóbeli szerepléseik, az egész évi munkájuk kerül mérlegelésre. A legalacsonyabb évvégi osztályzatátlag: 3,5, de többségük 3,8 - 3,96 - 4,05 - 4,1 - 4,2 átlagú.
A tagozatos osztályokba járó tanulók átlagosztályzata más tantárgyakból is 4-es körüli vagy felette van. A tanulók magatartása, a világ eseményei iránti érdeklődése, az iskolai életben való aktivitásuk átlagot meghaladó színvonalú. Ezek a tanulók egész személyiségükben nagyfokú fejlődést mutattak fel. Mindezek erősítik a tagozatos tantervű osztályok létjogosultságát.

IRODALOM

1. Kiegészítő tantervi tervezet az általános iskolai matematika szakosított tantervű 5-8. osztályok részére. 1980 és 1983. szeptember 1. (átdolgozott) - Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA és BALÁZS LÁSZLÓ. kb. 15 oldal

2. Matematika tagozatos 5. osztályok bevezetése és kísérleti tapasztalatai (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA és BALÁZS LÁSZLÓ 1982. szetp. 6. - kb. 20 oldal)

3. Év végi jelentés és összesítés a szakosított tantervű 5.-6. osztályok kísérletező munkájáról 1982/83. tanév. (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA és BALÁZS LÁSZLÓ 1983. júl. 5. kb. 80 oldal.)

4. A matematika tagozatos tanterv tanításának általános tapasztalatai 1983/84. tanévben (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA és BALÁZS LÁSZLÓ 1984. július 16. kb. 80 oldal)

5. Matematika szakosístott tantervet tanító iskolák összegezett tapasztalatai az 1981-85-ig terjedő tanévekben. (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA és BALÁZS LÁSZLÓ 1985. aug. 17. kb. 60 oldal.)

6. Módszertani útmutató a számítógépek alkalmazásához az általános iskolai matematika szakosított osztályokban (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA 1983. június 25. kb. 17 oldal)
   Ugyanez: Országos Pedagógiai Intézet sokszorosításában 250 példány.

7. Számítógépek és számítástechnika az általános iskolák matematikai szakosított osztályaiban. Módszertani útmutató az 5.-6.-7. osztályokhoz. (Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA 1985. július 10. kb. 40 oldal)

8. Módszertani ajánlás a szakosított tantervű osztályokban tanító nevelők részére (Kézirat: BALÁZS LÁSZLÓ 1981. szeptember kb. 12 oldal)

9. Számítógépek - számítástechnika az általános iskolák matematika szakosított osztályában.
   Módszertani útmutató a 8. osztályhoz.
   Kézirat: BALOGH VIKTÓRIA 1986. június 30. Kb. 36 oldal.

NAGY LAJOSNÉ

AKTIVITÁS A MATEMATIKAÓRÁKON AZ ÁLTALÁNOS ISKOLA 5-8. OSZTÁLYAIBAN C. KUTATÁSUNK ELSŐ KÉT ÉVÉNEK MUNKÁIRÓL

Abstract: Die Fachgruppe für mathematikunterricht und methodik der Egerer und der Erfurter Pädagogischen Hochschulen nahm ein gemeinsames Forschungsprogramm an, das am 1-sten Januar 1984 angefangen wurde. Wir führen diese gemeinsame Forschung im Themenkreis "Aktivität an den Mathematikstunden" durch.
Im Bericht analysieren wir die Arbeit der vergangenen 2 Jahre. Wir weisen auf die Probleme, die im vergangenen Zeitabschnitt sich gegeben haben. Wir stellen die Protokolle vor, auf deren Grund wir in mehr als 50 allgemeinen Schulen des Landes Beobachtungen durchführten.
Unseren Bericht haben wir mit Zusamennfassung un Analyse abgeschlossen.

Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematikai Tanszéke és a Dr. Theodor Neubauer Pedagógiai Főiskola Erfurt (NDK) Matematikaoktatás-Metodikai Tudományos szakcsoportja, a matematika szakmódszertan területén 4 éves közös kutatási programot fogadott el.

A közök kutatást "Aktivitás a matematikaórákon" c. témakörben végezzük, az 1984 január 1-én kezdődött négyéves tudományos kutatási terv alapján.

A kutatócsoport, illetve annak vezetői a megállapodás alapján rendszeresen tájékoztatják egymást a munka teljesítéséről, az eredményekről, a problémákról.

A következőkben céljainkról, tervezett és megvalósított feladatainkról -- munkánkról -- számolunk be.

A tanulói aktivitás jelentősége ismert a pedagógusok előtt. Nevelési célunk: sokoldalú, fejlett, képzett, az ismereteket alkotó módon alkalmazni tudó, olyan személyiségek kialakítása, akik aktívak a munkában, a társadalmi-politikai életben. A mindennapok gyakorlatában törekszünk ennek megvalósítására. Sok még a megválaszolatlan kérdés, tisztázatlan probléma, mint pl.:

- Aktívak-e a tanulók matematika órákon?
- Tudatos-e ez az aktivitás részükről?
- Mi motiválja az órai aktív magatartást?
- Hogyan lehetne érdeklődésüket biztosítani, tudásukat hatékonyabbá tenni?

Ezekre és még sok kérdésre kerestük és próbáljuk megfogalmazni a választ munkánk során.

Gyakorló pedagógusok a megmondhatói, hogy különböző vélemények ütköznek a témával kapcsolatban.

Néhány ezek közül:

- vannak akik a "mit tanítsunk" kérdést tartják elsődlegesnek;
- mások a tanár személyiségét ítélik a döntőnek, míg sokan
- a hogyan tanítsunk -- a módszert jelölik az első helyre;
- nem kevesen az eszközök, a technika, a számítógép "bevonulásától" várnak sikert.

Abban mindenki egyetért, hogy szükséges a tanulók aktív részvétele az órán, és ezen kívül is, ha a jelenleginél alaposabb tudást, a tárgy iránt nagyobb érdeklődést akarunk elérni.

Ezért is tűztük ki célul, hogy a tanulói aktivitásra irányuló kutatás a gyakorlat során felvetődő kérdésekre, problémákra keresse a választ. Lehetőleg olyat, amely konkrét segítséget jelenthet az iskolai gyakorlat részére. Ezt követően terveztük és dolgoztuk ki azokat a teendőket, amelyek az előzőekben jelzett feladatok megvalósítását segítik.

Az első évben a rendelkezésre álló szakirodalom (a hazai és külföldi) tanulmányozását, ezenkívül a hospitálásokat -- az iskolai gyakorlatok megfigyelését -- tekintettük a legfontosabbnak.

Úgy terveztük, hogy megfigyeléseinket az ország több száz általános iskolájában végezzük. Sajnos erre az eltelt két év során nem volt lehetőségünk. Segítségünkre volt az a több mint 50 általános iskola és az ott dolgozó matematika szakos tanár, ahol megfigyeléseinket végezhettük. A munkában résztvettek még III. és IV. éves matematika szakos hallgatók (a két év alatt több mint 100-an). Ezeket a megfigyeléseket nagyon hasznosnak tartjuk jövendő munkájuk szempontjából is, mert ráirányítja figyelmüket sok olyan problémára, amire különben nem biztos, hogy gondolnának (pl. az órára való felkészülés során kell tervezni a gyerekek aktív bekapcsolódásának lehetőségeit, az életkor, a pedagógiai, pszichológiai tényezők figyelembevételével...). Az órák elemzése során közvetlenül is tapasztalták, hogy a gyakorlat nagyon aprólékos, körültekintő munkát igényel. Van tehát még rájuk váró feladat!

Ebbe a kutatásba szívesen bekapcsolódtak a "tudományos diákkör"-i munkát végző hallgatók is, akik mondanivalójukat TDK, illetve szakdolgozatban összegezték.

A munka kezdetén hallgatók és tanárok közösen hospitáltunk. A látott órákat megbeszéltük. Az egységes látásmód, az "egy nyelven beszélés" miatt szükségessé váltak olyan megfigyelési szempontok, amelyek alapján rögzíthetők az órán látottak és hallottak. (Ti. a "csak ülök és figyelek, utána beszámolok" sok szubjektív elemet tartalmazott, megnehezítette a tapasztalatok összegezését, általánosítások levonását.)
Ezeket a megfigyelési szempontokat a jegyzőkönyvekben rögzítettük (figyelembe véve a társintézetben használt és már bevált megfigyelési szempontokat is).

Az 1984/85. tanévben osztálymegfigyeléseket végeztünk. (Több mint 200 órát.) Ezekből néhány adat a számok tükrében:

<u>A tanulók magatartása feladatmegoldás előtt:</u>

	5.o.	6.o.	7.o.	8.o.
1. Utasításra, kedvetlenül látott munkához a tanulók:	47 %	38 %	40 %	51 %
2. Felszólításra, igyekezettel:	16 %	31 %	25 %	15 %
3. Felszólítás nélkül, lelkesen:	37 %	31 %	35 %	34 %

Magatartásuk a feladatok megoldása közben:

	5.o.	6.o.	7.o.	8.o.
1. Kedvetlen, határozatlan:	15 %	19 %	18 %	6 %
2. Kevés segítséggel, intenzíven dolgozik:	43 %	35 %	31 %	42 %
3. Célratörő, intenzíven dolgozik:	42 %	46 %	51 %	52 %

Alkotói magatartás:

	5.o.	6.o.	7.o.	8.o.
1. Egyáltalán nem dolgozik:	10 %	15 %	10 %	7 %
2. Egyszerű feladatokat segítséggel tud megoldani:	23 %	21 %	18 %	24 %
3. Nehezebb feladatokat segítséggel old meg:	21 %	16 %	20 %	21 %
4. Segítség nélkül, eredeti elképzelései vannak:	46 %	48 %	52 %	48 %

Az aktív tevékenység mozgatórúgói:

	5.o.	6.o.	7.o.	8.o.
1. Kényszerből (szülő, tanár hatására) aktív a tanulók:	25 %	32 %	35 %	30 %
2. Személyes előnyöket remél:	20 %	25 %	25 %	30 %
3. Érdeklődésből, a szükségesség belátásából:	15 %	20 %	25 %	25 %
4. Tudatosan, a tárgy iránti lelkesedésből:	40 %	23 %	15 %	15 %

Mit mutatnak ezek a számok?

Keveset, ha csak a százalékok ismeretében akarunk a jövőre vonatkozó következtetéseket levonni.

Sokat, ha elemzésünk kiegészül azzal, hogy

- vannak pedagógusok, akiknek a matematika óráin aktív a tanulók többsége, tekintet nélkül arra, hogy ötödik vagy hetedik osztályban tanítanak;
- a differenciált munkaformák alkalmazásánál azok a tanulók is nagyobb kedvvel dolgoztak (aktívak voltak), akiknél ezt pl. a frontális munkánál nem tapasztaltuk;
- ha az ismeretszerzés, a fogalom kialakítása, szemléltető vagy munkaeszköz segítségével történt, a máskor nehezen aktivizálható tanulóknál is pozitív változás volt észlelhető (különösen 5. osztályosoknál);
- előnyösen befolyásolta a gyerekek aktív magatartását, ha a tanár értékelte munkájukat (dícsért v. elmarasztalt szóban v. írásban, ha osztályozott...)

Az előzőekkel csak azt kívántam jelezni, hogy a téma rendkívül összetett, a felvetődő kérdések megválaszolása nem egyszerű.

Az első évben végzett osztálymegfigyeléseknél azt tapasztaltuk, hogy kis létszámú (20-25 fős) osztályokban valósághű, nagyobb létszámú csoportoknál már sokkal nehezebb az egységes véleménykialakítás, a megfigyelés. Miért?

Egyetlen részfeladatnál is nagyon különbözően reagáltak a tanulók pl. "munkafelvételnél" a gyerekek egy része lelkesen, felszólítás nélkül, mások csak figyelmeztetésre, majd ismét mások kedvetlenül láttak munkához. Minden mozzanatra úgy odafigyelni egy embernek, hogy az az osztály egészére (30-40 gyerek) kiterjedjen szinte megoldhatatlan feladatnak bizonyult. Osztálymegfigyelés esetén, nyugodt lelkiismerettel sokszor csak arra lehetett választ adni, hogy "az óra meghatározott részében a tanulók döntő többsége" milyen fokú aktív magatartást tanúsított.

A kutatás első éve hasznos tapasztalatokat nyújtott arra, hogy eldönthessük, melyek azok a módszerek, amelyeket a későbbiekben is alkalmazni fogunk, mi érett meg a változtatásra és milyen új szempontokkal, kutatási módszerekkel bővíthetjük azokat. Ilyen megfontolások alapján döntöttünk úgy, hogy

a/ átdolgozzuk az előző évben használt jegyzőkönyveket (1.2. sz. melléklet);

b/ az osztálymegfigyelések mellett egyének megfigyelését végezzük (1-1 tanulót legalább 5 órán át);

c/ a hospitálást, megfigyelést követően elbeszélgetünk az órán tanító pedagógussal és a megfigyelt tanulóval. Tájékozódni kívánunk arról:

- hogy hogyan látja, értékeli a tanár saját munkáját;
- tanítványai óra alatti aktivitását;
- alkalmazott módszerei, munkaformái segítették vagy gátolták tanítványai aktív közreműködését;
- tudatosan tervezte, szervezte-e a gyerekek aktivitását;
- az előforduló -- általa is észrevett -- hiányosságok hogyan lehettek volna elkerülhetők;
- a megfigyelt tanuló önértékelése az órai munkáról, magatartásáról; és végül
- mennyiben tér el, egyezik meg a tanár és tanuló értékelése a megfigyelést végző véleményével; ... és még sok más kérdésre keressük a választ az órai tapasztalatok alapján.

Ezeket a megbeszéléseket sok esetben -- az érintettek hozzájárulásával -- magnóra is rögzítjük.

Az elmúlt félévben már több mint 300 ilyen egyéni megfigyelést végeztünk, és ez a munka jelenleg is folyamatos.

Az elmúlt időszak munkája is sok hasznos tanulsággal szolgált mint pl.: A tanároknak szükséges tervezni, hogy mikor és hol kívánják a tanulókat bekapcsolni, motiválni az órai munkában.

A gyerekekkel való elbeszélgetés is érdekes, hasznos tanulságokkal szolgált. Gyakori, hogy a tanár véleménye nem egyezik a diák saját magáról alkotott képével. Sok tanuló elégségesnek tartotta, ha csak egyes órákon, illetve az óra egy részében aktív. A legtöbb gyerek indokolni is tudta aktív, vagy passzív magatartásának okait.

Az ötödik osztályosoknál még erősen érzelmi színezetűek ezek az indokok, (döntő a tanár személyisége, a pszichés tényezők erősen hatnak). Nyolcadikosoknál előtérbe kerül a pályaválasztás, az osztályzat, de még mindig jelentős a tanár személyisége is. Nem szeretnénk elhamarkodott, megalapozatlan következtetéseket levonni. Ezért a következő félévben (1986. II. félév) még jelentős számú megfigyelést kívánunk végezni.

Azt már az eddigiek alapján is megállapíthatjuk, hogy összefüggés van

-- a tanár személyisége --, az órán alkalmazott módszerek és munkaformák; és sok más, ma még talán kevésbé fontosnak tartott tényező között. Az ezekre való nagyobb odafigyelés, az elemzések során következtetések levonása a következő évek egyik feladata.

Az elmúlt két év jelentős volt számukra, és biztosak vagyunk abban, hogy a jelen és a jövő években is sok munka vár ránk.

Eddigi kutatásunkat nem tekintjük lezártnak.

További munkánk is arra irányul, hogy eddig szerzett tapasztalatainkat kiegészítsük, megfigyeléseinket elemezzük, és a gyakorlat számára hasznosítsuk.

1. sz. melléklet

AZ AKTIVITÁS FOKA

A tanuló neve: .... Jegye: ....

I. Munkafelvétele feladatmegoldás közben

1. egyáltalán nem, kedvetlenül.......................... ....
2. figyelmeztetésre, lassan, unott, szórtfigyelmű......... ....
3. felszólítással, igyekezettel, tartósan intenzív........ ....
4. rögtön, lelkesen, célratörő, intezív.................. ....

II. Akadály esetén tanúsított magatartása

1. kedvét veszti, határozatlan, feladja.................. ....
2. keresi a megoldást, nem kér segítséget................ ....
3. nem akarja feladni, segítséget keres, kér............. ....
4. állhatatos, nem adja fel, önállóan keresi a megoldást.. ....

III. Eredményekhez való viszonyulása

1. közömbös saját és mások véleménye iránt............... ....
2. az eredmény megismerésének igénye változó............. ....
3. igényli saját eredményét és annak bemutatását.......... ....
4. a saját és mások eredményének megismerését igényli, állhatatos, vitával megvédésre törekszik.............. ....

IV. - Elsajátítási magatartás; önállóság a munkában

1. kelletlen, nincs igénye az önálló ismeretszerzésre önállótlan, bizonytalan............................. ....
2. gyakorol, de kedvetlenül, kényszerűségből, gyakori irányítást, bátorítást, ellenőrzést igényel........... ....
3. van igénye az ismeret elsajátítására, igyekszik tudását másokéval összehasonlítani, kezdetben segítséggel, utána önállóan dolgozik.................................. ....
4. szívesen tanul, igénye a tudás, gyakorol, bizonyítani akarja tudását, önálló, kitartóan dolgozik............ ....

V. Szaknyelv használata

1. szaknyelvet nem használ............................... ....
2. figyelmeztetésre, felületesen használja a szaknyelvet.. ....
3. átgondolt, a szaknyelvet jól használja................. ....
4. a szaknyelv használata tudatos, pontos................. ....

VI. Egyéb észrevétel

2. sz. melléklet

AZ ÓRA ELEMZÉSE

Iskola:..

Osztály:...

Az óra témája:...

Az óra típusa:...

Időpont:...

Tanító neve:...

---

1. A tanítási és tanulási módszerek alkalmazásának gyakorisága
   - a/ beszélgetés ....
   - b/ előadás ....

2. A tanítási és tanulási munkaformák alkalmazásának gyakorisága
   - a/ részben önálló munka ....
   - b/ önálló munka ....
   - c/ csoport munka ....
   - d/ differenciált munka ....

3. A tanár által irányított folyamat hatása a tanuló aktivitásra

   1. tökéletes 2. részleges 3. egyáltalán nem

   ....

4. A tanulók aktivitása a különböző módszerek és munkaformák hatására
   - a/ beszélgetés.............................. ....
   - b/ előadás.............................. ....
   - c/ részben önálló munka.............................. ....
   - d/ önálló munka.............................. ....
   - e/ csoport munka.............................. ....
   - f/ differenciált munka.............................. ....

1. túlnyomó 2. részleges 3. egyáltalán nem

5. A tanítási eszközök hatása az aktivitás növelésére

1. tökéletes 2. részleges 3. egyáltalán nem

....

6. A tanulói értékelés gyakorisága az órán, és azok hatása a tanulók aktivitására

a/ osztályközösség értékelése ....

b/ egyének értékelése érdemjeggyel.................... ....

c/ egyének értékelése szóban.......................... ....

d/ egyének értékelése írásban......................... ....

7. Motiváltság

a/ Felismerhető-e a motiválás?

b/ A motiváció hatékonysága?

1. tökéletes 2. részben 3. nem

8. Egyéb észrevétel

AJÁNLOTT IRODALOM

Az alkotó gondolkodás kutatási problémái.
(Szerk: Salamon Jenő) AK Bp. 1979.

Bacher, F.: Hogyan értékelik a tanárok tanulóikat?
Tan. nev. tud. köréből 1972-1974. AK Bp. 1975.

Bakonyi Pál: A tanulói aktivitásról. Köznevelés XVIII. évf.
1962. 4. sz.

Buzás László: A tanulók aktivizálásának egyes formái a reform-
pedagógiában, különös tekintettel a hazai új iskolára.

Cser Andor: A tanulói aktivitás.
Tan. nev. tud. köréből AK. Bp. 1962.

Cser Andor: Osztályozás a matematika tanításában.
A Matematika Tanítás 1968. 1. sz.

Gádorné Donáth Blanka - Hegedűs Gyuláné: A tanulók aktivizálható-
ságának kérdése egy neveléslélektani vizsgálat tükrében.
Pszich. Tan. XI. AK. Bp. 1968.

Horányi Péterné: A tanulók aktivizálásának újabb kísérletei.
A Kémia Tanítása. 1963. 5. sz.

Horváth Lajos: A tanulók aktív részvételének megvalósulása az
új anyag feldolgozásában.
Tan. nev. tud. köréből 1961. AK Bp. 1962.

Kelemen László: Pedagógiai pszichológia TK. Bp. 1981.

Dr. Kerékgyártó Imre: Aktivitás, önállóság, önnevelés. Módszertani közlemények 1975. 15. évf. 3. sz.

Kiss Lajos: Motiváció és aktivitás. Köznevelés XVIII. évf. 1962. 18. sz.

Landau, E.: A kreativitás pszichológiája TK. Bp. 1976.

Langer, S.: Szempontok a 7-15 éves gyermekek személyiségjegyeinek megítéléséhez. Pedagogika, 1976. 6. (OPKM Dok.)

Szokolay István: Az aktivitás elve mint általános pedagógiai alapelv. Tan. nev. tud. köréből 1961. TK. Bp. 1962.

Szokolay István: Tanulmányok a tanulói aktivitás köréből. Tankönyvkiadó Bp. 1966.

Tihanyi Andor: A tanulók aktivitását serkentő tényezők az általános iskola alsó tagozatában. Tan. nev. tud. köréből. 1961. AK. Bp. 1962.

Veczkó József: Vizsgálatok a pedagógusok gyermekismeretéről. Magy. Ped. 1980.

Zukovits Imre: A játékosság mint a tanulói aktivitást serkentő tényező Magy. Ped. 1969. I.

Zukovits Imre: Az aktivitás serkentő tényezői az otatásban Tankönyvkiadó Bp. 1972.

VARGA SÁNDORNÉ

AZ EGRI TANÍTÓKÉPZŐ MATEMATIKA OKTATÁSA (1828-1882)

Abstract: (Обучение математике в Эгерском педучилище /1828 - 1882/). Данную тему я разработала по оригинальным источникам. Анализ разработанных учебных программ я провела в частности по рукописным архивным источникам, а в большей части по печатным материалам. В данной работе можно проследить материальное и методическое развитие математики как предмета в хронологическом порядке с образования до прекращения педучилища.

I. rész

A kétéves és a hároméves képzés tanterve

Napjainkban -- miközben rendszeresen foglalkoztat bennünket a jelen és a jövő matematika tanításának kérdése -- mind szükségesebb, hogy fejlődésében vizsgáljuk matematikaoktatásunk alakulását. Az egyes jelenségek okait, következményeit a háttér, a múlt ismeretében jobban meg tudjuk érteni.

Ez a törekvés nem öncélú, hiszen a marxista neveléstörténeti irodalom kiemelte azt a marxi-lenini tételt, hogy a történetiség elvének érvényesítése egyaránt fontos minden tudományág számára, a történeti fejlődésben érvényesülő törvényszerűségek ismerete a jelen megértéséhez és a jövő kimunkálásához egyaránt nélkülözhetetlen.

Az egri Tanítóképző matematika oktatásának kidolgozása eredeti források feltárása alapján történt.

Az egri Megyei Levéltárban, az egri Egyházmegyei Levéltárban, az egri Egyházmegyei Könyvtárban, a debreceni KLTE könyvtárában és az országos Pedagógiai Könyvtárban végeztem kutatásokat.

A feldolgozott korabeli latin és magyar nyelvű források egy része kéziratos, más része pedig nyomtatott anyag.
Az 1828-ban létrejött egri Tanítóképző tanterveit az első években, 1845-ig a tanárok dolgozták ki.
A részletes tanítástervet az érsek és a Helytartótanács hagyta jóvá az első években.

1828/29-es tanév tanításterve a számvetésből (5)
- A közönséges és Római leírott számbetűk kimondásáról és a kimondottak leírásából.
- A Nevezetlen és Megnevezett és Tört Számoknak összveadásárul, kivonásáról, sokszorozásáról és elosztásáról. (Ekkor még csak az első évfolyam volt meg.)

1829/30-as tanév matematika anyag a II. éveseknek:
- A Hármas regulárul.
- A Társaság és az Interesek (Kamatok) Reguláiról

  A régies elnevezések és műveletek magyarázatra szorulnak:
  - Nevezetlen szám pl. 3.4.-.........
  - Megnevezett szám pl. 3 év, 4 hó, 13 ft. stb.

  Hármas regula: pl.: Ha 120 l. bor ára 58,8 Pengő, mennyibe kerül 96 l.?

Megoldás: 120 liter ára 58,8 Pengő
24 liter ára 5-ször kevesebb
96 liter ára 4-szer több

$$x = \frac{58,8 \times 4}{5}$$

Ugyanez - Olasz módon való következtetéssel

120	liter ára	58,8	P
60	liter ára	29,40	P
30	liter ára	14,70	P
6	liter ára	2,94	P
96	liter ára	47,04	P

Összetett hármasszabályt a % és kamatszámításnál használtak.

A Társaságszabály:

arányos részekre való osztást jelentett.

Pl.: Egyszerű térsaság szabály.

Egy vállalatra A: 1250 Ft-ot ad, B: 1200 Ft, C: 1150 Ft-t ad.
Ha a vállalatból 900 Ft nyereség származott, mennyit kap ezen nyereségből mindegyikük?

1250
1200
+ 1150
3600 Ft, tehát 900 Ft-ot nyert

Így 1 Ft: $\frac{900}{3.600} = \frac{1}{4}$ Ft-ot nyert

Ezek szerint:

A: nyert: $1250 \times \frac{1}{4} = 312{,}50$ Ft

B: nyert: $1200 \times \frac{1}{4} = 300{,}-$ Ft

C: nyert: $1150 \times \frac{1}{4} = 287{,}50$ Ft

Összetett társaságszabályra:

Példa:

Pl. Egy munka kivitelére 5 község ad munkásokat, és pedig:

A község	20 munkást	12 napra
B "	32 "	10 "
C "	30 "	15 "
D "	25 "	18 "
E "	35 "	14 "

A munkáért 975 Ft-ot fizettek ki. Mennyit kapott ezen munkadíjból minden község? Mennyit naponként egy-egy munkás?

Megoldás:

Hány napi munkája van egy községnek?

A. 20 x 12 = 240 nap
B. 32 x 10 = 320 nap
C. 30 x 15 = 450 nap
D. 25 x 18 = 450 nap
E. 35 x 14 = 490 nap
1950 nap

Ha 1950 nap után 975 Ft jár, mennyi jut egy napi munkára:

975 : 1950 = 0,5 Ft

A község 240 x 0,5 = 120 Ft
B község 320 x 0,5 = 160 Ft
C község 450 x 0,5 = 225 Ft
D község 450 x 0,5 = 225 Ft
E község 490 x 0,5 = 245 Ft

A tanmenet készítés ekkor még ritkaság számba ment. De sikerült találni rá példát 1830-ból (6).

Tanmenet I. év 1830-ból
Számvetés

Nov. Gondolattal számolni, összeadni, kivonni előbb 10-ig, aztán 20-ig.
Dec. Gondolattal sokszorozni és elosztani, de csak tízig.
Jan. A számjelek ösmérete, krétával kiírása és jelekkel való számlálás.
Febr. Összeadás és kivonás - ezek táblája közben a Római számjelek ösmérete. Húsvét után a sokszorozó tábla elkészítése, és jelekkel való sokszorozás.
Máj. A pénzek és mértékek ösmérete - a nevezett számok felbontása sokszorozás által.
Jún. Elosztás ez által a nevezett számok öregbítése.
Júl. A nevezett számok összeadása, kivonása, sokszorozása és elosztása.

Tanmenet II. év 1830-ból

Számvetés

Nov. Gondolattal és jelekkel való számolás összeadás, kivonás és a táblák elkészítése.

Nov. Sokszorozás.

Nov. A pénzek és mértékek ösmérete és sokszorozásokkal felbontása.

Dec. Elosztás és a nevezett számok öregbítése.

Dec. A nevezett számok összeadása, kivonása, sokszorozása, elosztása.

Jan. A tört számok ösmérete és változása.

Febr. A tört számok összeadása, kivonása, sokszorozása és elosztása.
Húsvét után bővebb gyakorlása a törtszámoknak.

Máj. Egyenes Hármas Regula.

Jún. Visszás összetett és törtszámokkal hármas regula.

Júl. A Társaság regulája.

Írta: Kiss János

Az 1831-es tanévtől 1839-ig nincs változás a számvetés tantervében. Az 1839-42-ig terjedő tanévekben csupán az Összetett Regulával bővült a tanterv.

Az 1843/44-es tantervben a mértékegységek is előtérbe kerülnek:

A mértékek különböző nemeiről: Folyadék, szemes, életsúly, hosszúság, távolság, terület és időmértékekről is tanulnak.
Az 1848-as szabadságharc kitöréséig már nincs lényeges változás az 1843-as tanterv számtan anyagához viszonyítva. 1845-ben a Helytartótanács kérésére Egerben is elfogadják a központilag ajánlott tanítási terveket.
Az egri tanítóképző tanulmányi tekintetben ezután a kassai főigazgatósághoz került.
Az 1848-49-es szabadságharc leverése után az Organisátións Entwurf lépett életbe, 1849. okt. 1.-én. Ez a rendelet germanizálni akarta a képzőt is.
Az abszolutizmus a tanítóképzők nívóját csökkentette.

Ezután a felvételhez elég az alreáliskola II. osztályának, vagy az algimnáziumnak az elvégzése.
Számolásból követelmény: 1849/50-ben, fej és írásbeli számolást kell gyakorolni úgy, hogy minden műveletben ügyességet és biztosságot tanúsítsanak. Továbbá üzleti számolás egészekkel és törtekkel egyaránt gyakorolandó volt.

Az 1853/54-es tanévtől kezdve már a két félévre különbontották a tantervet 1853/54 első félév I. évesek tanterve Számtanból.

a./ Miképpen kell a gyönge növendékekben a figyelő és számláló tehetséget fejleszteni?
b./ Min kell a számvetés tanítását kezdeni?
c./ Miképpen kell az elmebeli összeadást és kivonást tanítani?
d./ Miképpen kell a tizedes számrendszert magyarázni és a leírt számjeleket kimondani?
e./ Összeadás és kivonás leírt számjegyekkel.
f./ Miképpen kell a kivonásnál a kölcsönzést könnyen megfoghatóvá tenni?
g./ Mi a szorzás? Hogyan kell annak tanítását kezdeni?
h./ Mit szoktunk tenni a zérusokkal és miért? Szorzás gyakorlati előnyökkel.
i./ Lehet e tényezőket felcserélni és miért?
j./ Mi az osztás, mi eszköz szolgál annak tanítására?
k./ Az osztás míveletéről. Mi történik a maradékkal és miért?
l./ Hogyan kell az osztandót, osztót és hányadost tekinteni?
m./ Mi a négy művelet próbája? Miért?
n./ Miféle számpéldákat kell lelginkább a növendékeknek feladni?
o./ Az elmebeli számvetés gyakorlás módjáról.

1853/54. Második félév I. évesek tanterve Számtanból

A számtani és mértani arányokról. A mértani aránylatról, a tagjainak változtatásairól. Az egyszerű arányszabályról. Az összetett arányszabályról. A láncos szabályról.

1853/54. Első félév II. éves tanterve

Számvtésből

a./ A közönséges törtek fogalma, azoknak alakjai és azok értéke.
b./ A közönséges törtek alakváltozásai a közös osztó keresése és erre vonatkozó gyakorlati szabályok. Mely számok oszthatók tisztán 2,3,4,5,6,7, 8,9,10, és 11-el.
c./ A közönséges törtekkel összeadás.
d./ A tizedes törtek fogalma és azok helyértéke.
e./ Közönséges törteknek tizedesekre való átváltoztatása.
f./ Tizedes törtekkel összeadás, kivonás, szorzás, osztás.

1853/54 Második félév II. évesek tanterve

Számtanból

A bel- és külföldi pénznemek, súly, idő, tér és űrmértékek ismerete. Nevezett számokkali összeadás, kivonás, szorzás és osztás egyenként és vegyes példákban. Főbeli számvetés gyakorlatok.
Az 1853/54-es tanterv már nemcsak azt mutatja meg, hogy mit kell tanítani, hanem a hogyan kérdését is felveti. Sőt a miértekre is választ vár. Figyelmet fordít a műveletek próbájára is és a gyakorlás módjára.

A láncszabály: vagy láncos szabály

A hármasszabályhoz tartozó feladatok ilyen elrendezését jelenti:
Pl.: Feltét: 300 1/2 Ft-ért 30 vég vászon vehető.
Kérdés: 50 7/10 Ft-ért X vég vásznat vehetni

ok	300 1/2 Ft-	30 vég	okozat
okozat	X. vég	50 7/10 Ft.	ok

Az 1855/56-os tanévtől a hármasszabály v. arányszabály új neve:

Aranyszabály

1857-ig heti 1 órában tanították a számvetést. 1858-tól a számtan és ütenyírás heti 2 óra lett.

Igen nagy fejlődés, hogy jegyzetek helyett az 1853/54-es tanévtől tankönyvekből tanítják a számtant.

1858-ban már tanfolyamokat is szerveznek az oklevél nélkül tanító népiskolai oktatóknak nyáron.

Újabb tantervi változást az 1860. év hozott.

Az 1860.-ki októberi diploma (7) bizonyos tekintetben változásokat hozott a tanításügyben. Az oktatás feletti főfelügyelet kikerül a bécsi cs. és kir. minisztérium kezéből és átkerül a Helytartóság budai osztályára. Új tanítástervet dolgoztat ki a Helytartóság.

E szerint a tanítóképző I. évfolyama elméleti a II. évfolyama gyakorlati irányú lesz. Ekkor vezeti be a tanterv a méréstant. (Eddig a számtannal együtt tanulták.)

A kiegyezésig lényeges változás nincs a matematika tantervben.

A kiegyezés nemcsak politikai tekintetben, hanem tanügyi téren is változásokat hozott.

Báró Eötvös József a nagy idők kultuszminisztere folytatta tovább azt a munkát, amit a szabadságharc előtt abbahagyott: az új népoktatásügyi alaptörvény megalkotását.

Az 1868. XXXVIII. t.c. lett a magyar alkotmány első iskolai törvénye. Ennek hatására három évre emelik a képzési időt (1871/72-ben lépett be az első III. évfolyam).

Bárány Ignác: Tanítók könyve (1871-ben) részletes módszertani útmutatást is ad a mennyiségtan, és mértan oktatásához.

Mennyiségtan tanterve 1871-ből (8)

- Négy alapművelet 1000-nél is nagyobb egész számokkal, sőt törtekkel is.
- Hármasszabály, egyszerű kamatszámolás.
- Tizedes törtekkel való számlolás.
- Olasz számítás.
- Összetett kamatok kiszámítása.

- Társaságszabály.
- Lánc-szabály.
- Kamatos-kamat számítás.

A közéletre való tekintetből:

a takarékpénztárakat
élet
tűz
és jégkárbiztosító számításait tanítják.

Társulatokat is meg kell ismerni főbb vonalakban.
Itt ismeretlen fogalom az olasz számítási mód.
A feladatban előforduló számok kisebbekre bontatnak szét miáltal a feladat mintegy több kisebb feladatra oszlik (9).
Megjegyzés: Az olasz számítási módot a hármas szabállyal kapcsolatban példán keresztül ismertettem.

A mértan oktatás tanterve 1871-ből

- a tárgyak helye, fekvése, iránya, alakja;
- testek és síkok;
- vonalak és a pont;
- hosszmértékek;
- szögek és ezek mérése;
- a háromszög;
- egyenközű vonalak;
- négy és többszögek;
- síkmértékek;
- felszínszámítás;
- építési kötségvetések;
- kör területe;
- henger és általában gömbölyűalakú testek terünéjének (térfogatának) kiszámítása.

Változás a tantervben akkor következett újra, amikor négy évre emelték a képzést. Ez az 1882/83-as tanévtől kezdődött.

A IV. évfolyam 1886/87.-i iskolai évben nyílt meg.

A négy évfolyamú képző tanításterve a réginél sokkal teljesebb, nagyobb körű tananyagot szabott ki, amely az ú.n. túlterheléshez vezetett.

JEGYZETEK

1. Kisbán László: A mennyiségtan tanítása Magyarországon 1700-1848-ig. (Pedagógiai Intézet Értekezései. 1939.)

2. Veres László: Tanmódszerű számtantanítás, vezérkönyvül a népiskolatanítók számára, s magányhasználatra.

3. A Tanítóképző tantervei (1828-1856-ig) Érseki levéltár Eger, Preparandia iratai 2694.

4. A Tanítóképző tantervei (1828-1856-ig) Érseki levéltár Eger, Preparandia iratai 2695.

5. Maskovits Mihály: A falusi Iskolamesteri Hivatalra készítendők számára az egri anyamegyében alapíttatott Intézetnek rövid előadása. 1834. egri Érseki Levéltár. 2694.

6. Kiss János: A kisebb nemzeti iskolákra kiszabott tárgyaknak részenként és a maga helyén lévő előadását mutató tábla. 1830. Érseki levéltár Eger, 2694.

7. Benkóczi Emil: Pyrker első magyar tanítóképzője. 1928. Egri egyházmegyei könyvtár. 69. oldal.

8. Bárány Ignác: Tanítók könyve 1871. 175. oldal. Egri Gárdonyi Géza Gimnázium könyvtára.

9. Dr. Lutter Nándor: Közönséges számtan 1877. KLTE könyvtár Debrecen.

MARGA SCHMIDT und WOLFGANG ZILLMER

ERSTE ERGEBNISSE DER FORCSHUNGEN ZUR ERHÖHUNG DER GEISTIGEN AKTIVITÄT DER SCHÜLER IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Seit einigen Jahren sind Untersuchungen, die auf die geistige Aktivität der Schüler im Unterricht gerichtet sind, zu einem festen Bestandteil der Didaktikforschung in unserem Land geworden, weil jegliche Aktivität des Individuums, insbesondere also auch die geistige Aktivität, einen positiven Einfluß auf die Entwicklung der Persönlichkeit hat. Das Streben nach hoher Aktivität des Lernenden ist deshalb auch ein wesensbestimmendes Markmal der marxistisch-leninistischen Pädagogik. Der Grund für die Betonung der Erhöhung der geistigen Aktivität ergibt sich daraus, daß der in der Schulpraxis erreichte Entwicklungsstand und die auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß der DDR entwickelte schulpolitische Strategie nahelegten, darin jetzt ein Hauptkettenglied auf dem Wege zu höherer Qualität und Effektivität des Unterrichts zu sehen.

Ausgehend von diesen Feststellungen erklärt sich auch die Zuwendung der Mathematik-Methodiker unserer Einrichtung zu diesem Forschungsgegenstand. Gemeinsam mit den Methodik-Bereichen der Partnereinrichtungen in Eger und Banska Bystrica wurde ein Forschungsprogramm in Angriff genommen, das es sich zur Aufgabe gemacht hat, Fortschritte bezüglich der Entwicklung der geistigen Aktivität im Mathematikunterricht zu erzielen. Dabei ging es in der ersten Etappe darum,zu erkunden wie sich der gegenwärtige Zustand im Mathematik- unterricht bezüglich der Entfaltung der geistigen Aktivität der Schüler charakterisieren läßt.

Einige ausgewählte Ergebnisse sollen in diesem Beitrag und in dem sich anschließenden Bericht von Nagy (Pädagogische Hochscule "Ho Si Minh" Eger) vorgestellt werden.

In unserer Situationsanalyse sollte insbesondere den folgenden Fragen nachgegangen werden:

1. Wie ist der gegenwärtige Stand der Schüleraktivität im MU zu charakterisieren?

2. Welche Faktoren beeinflussen die Schüleraktivität positiv bzw. negativ?

Wir führten im Schuljahr 1984/85 in Erfurter Schulen Hospitationen in Mathematikstunden durch. Es wurden dis Klassenstufen 2 bis 10 in sehr unterschiedlichem Umfang erfaßt. Insgesamt wurden 133 Stunden hospitiert. Diese Hospitationen erfolgten nach einem einheitlichen Schema und wurden von einer Gruppe von etwa drei Mitarbeitern und 15 Studenten durchgeführt. Nach der hospitierten Stunde wurde kollektiv ein Protokoll unseren Vorgaben entsprechend erstellt. Außerdem wurde ein Auswertungsbogen, auf dem verschiedene der Zielstellung der Praxis-analyse entsprechende Aspekte erfaßt wurden, zu jeder Stunde ausgefüllt.
Durch diese Aspekte sollten Antworten auf folgende Fragen gefunden werden:

Aspekt 1:
Waren in den Mathematikstunden Motivierungen und Zielstellungen/ /Zielorientierungen enthalten und welche Wirkung bzgl. der Schüleraktivität üben diese aus?

Aspekt 2:
Mit welcher Häufigkeit traten in den Mathematikstunden die einzelnen Unterrichtsmethoden auf und welchen Einfluß haben einzelne Unterrichtsmethoden wie Lehrervortrag oder Unterrichtsgespräch auf die Aktivität der Schüler?

Aspekt 3:
In welchem Maße erfolgte die Aktivierung der Schüler durch problemhafte Unterrichtsgestaltung bzw. durch innere Differenczierung?

Aspekt 4:
Welchen Einfluß üben allgemeine Qualitätsmerkmale des Unterrichts (wie bewußte disziplin, Führungsstil und Lehrerpersönlichkeit, Gestaltung der sozialen Beziehungen) auf die Schüleraktivität aus?

Aspekt 5:

Wie wird die Arbeit mit Aufgaben im Mathematikunterricht gestaltet (wie didaktische Zielsetzung, Erzeugung selbständiger Schülertätigkeiten, erzieherische Einflußnahme)?

Bis zum heutigen Zeitpunkt erfolgt eine erste, stark an den genannten Aspekten angelehnte Auswertung des Analysematerials. Auf einige Ergebnisse wollen wir im folgenden näher eingehen. Zur Frage des Vorhandenseins von Motivierungen, Zielstellungen sowie Zielorientierungen und deren Auswirkungen auf die geistige Aktivität der Schüler lassen sich folgende Feststellungen treffen:

1. Es gibt Stunden, in denen weder Motivierungen noch Zielstellungen erkennbar waren.
2. In den Stunden mit Motivierungen oder Zielorientierungen war die geistige Aktivität der Schüler wesentlich höher als ind den Studen ohne.
3. Einigen Lehrern gelingt es schon gut, Motivierungen/Zielorientierungen in ihrem Unterricht wirkungsvoll zu realisieren.
4. Bei guten Ansätzen wird der Prozeß der Zielorientierungen nicht immer vollständig durchlaufen.
5. Die Mehrzahl der Stunden, in denen motiviert wurde, sind Einführungsstunden, Übungsstunden werden selten motiviert.
6. In oberen Klassenstufen treten Motivierungen immer soltener auf, hier sind oft formale Zeilstellungen anzutreffen.
7. Innermathematische Motivierungen treten erst ab Klasse 7 auf.
8. Lehrer achten bei der Planung der Stunden zu wenig auf Motivierung/ /Zielorientierung.

Nur in wenigen Fällen wären wirkungsvolle Motivierungen zu beobachten. Das äußert sich darin, daß z. B. die Notwendigkeit des Vorgehens nicht erörtert wird (fehlende innermathematische Motivierung), oder daß das Bedürfnis nach Vervollständigung bzw. Ergänzung der Theorie nicht geweckt wird.

Das Erkenntnisinteresse der Schüler wird auch über die erfaßten außermathematischen Bereiche nur unzureichend gewerckt. Aufgaben werden nur in geringem Maße zur Motivierung eingesetzt. Ihr Einsatz erfolgt in der Regelfast ausschließlich zur Festigung. Zielstellungen erfolgen häufig rein formal, beschränken sich auf das Bekanntgeben des Stundenthemas. Wie weit man in der Stunde kommen will, was nach den 45 Minuten erreicht sein soll, welcher Grad der Beherrschung angestrebt wird, das alles spielt eine untergeordnete Rolle. Aktivierende Wirkung, Erwartungshaltung, Spannung, Begeisterung und Lösungsstreben wird nur in Ausnahmefällen bereits durch die Zielstellung erreicht.

Die Hospitationen zeigten aber auch: Wenn Lehrer durchgängig zielorientiert arbeiten, dann hat das einen positiven Einfluß auf die geistige Aktivität ihrer Schüler.

In bezug auf die Häufigkeit der Verwendung einzelner Unterrichtsmathoden und deren Einfluß auf die geistige Aktivität der Schüler erbrachte die Analyse folgendes Bild:

1. Im Unterricht wird bevorzugt anleitend bzw. darbietend gearbeitet. Tabelle 1 zeigt, bezogen auf unterschiedliche Klassenstufen, den prozentualen Anteil der verschiedenen Lehr- und Lernweisen.

Tabelle 1:

Klassenstufe	5/6	7/8	9/10
überwiegend darbietend	40 %	19 %	60 %
überwiegend anleitend	30 %	49 %	20 %
überwiegend anregend	18 %	12 %	18 %

2. In Erarbeitungs- und Festigungsstunden verteilen sich die Unterrichtsmethoden wie folgt:
   Erarbeitungstunden - 20 % überwiegend darbietend
   30 % teilweise darbietend
   50 % überwiegend anleitend

25 % teilweise anregend
Festigungssatunden - 36 % überwiegend anleitend
20 % überwiegend anregend
50 % nicht anregend!

3. Es bestätigt sich die These, daß druch die darbietendd Lehrweise vorwiegend geringe geistige Aktivität bewirkt wird, daß durch die anleitende Lehrweise mittlere und durch die anregende Lehrweise mittlere bis hohe geistige Aktivität ausgelöst wird.

4. In den Klassen 9/10 ist insgesamt nur geringe bis mittlere geistige Aktivität festzustellen.

Ein wekterer Gesichtspunkt bei der Hospitation und der Auswertung des Unterrichts waren die problemhafte und differenzierte Unterrichtsgestaltung. Hier berechtigen uns die Untersushungen zu folgenden Feststellungen:

1. Von den insgesamt 133 protokollierten Stunden waren nur 35 Stunden problemhaft gestaltet.
   Oft bleiben Versuche problemhaften Unterrichts auf der ersten Stufe des Problemlösungsprozesses (dem Schaffen der Problemsituation) stehen.
2. In den Phasen der problemanalyse und der problemlösung werden nicht in ausreichendem Maße produktive Schülertätigkeiten geplant und organisiert.
3. Das Bevorzugen des Unterrichtsgesprächs (insbesondere das katechisierende) führt zu geringer Aktivität im Problemlösungsprozeß.
4. Differenczierungsmaßnahmen treten selten im Mathematikunterricht auf, wenn man individuelles Eingehen auf die Schüler als Grundforderung an einen guten Unterricht ausklammert.
5. In oberen Klassenstufen (ab Kl. 7) sind kaum noch Differenzierungsversuche registriert worden.
6. Wenn differenziert wurde, dann war eine höhere Aktivität feststellbar.

7. In Festigungsstunden wurde häufiger als in Erarbeitungstunden versucht zu differenzieren.

In bezug auf den Einfluß allgemeiner Qualitätsmerkmale des Unterrichts auf die Schüleraktivität zeichnet sich folgendes Bild ab:

1. Es besteht ein untrennbarer Zusamennhang zwischen der Erhöhung der geistigen Aktivität und der Erziehung zur bewußten Disziplin sowie der Qualitat des führungesstils des Lehrers.
2. Ein hoher Ausprägungsgrad en bewußter Disziplin ist eine Grundbedingung für die Erhöhung der geistigen Aktivität.
3. In den Mathematikstunden der Unterstufe und der Klassen 5/6 gelingt es den Lehrern besser, einen dem Alter angemessenen sozialistischen Führungsstil zu realisieren als in der Oberstufe.
4. Altersbedingte Besonderheiten in der Persönlichkeitsentwicklung (z. B. Selbständigkeitsstreben, zunehmende Kritikfähigkeit) werden in oberen Klassen (9/10) nur ungenügend beachtet.
5. Wesentlich für die Sicherung und Erhaltung der Disziplin im Unterricht sind die Autorität des Lehrers und ein gutes Lehrer-Schüler-Verhältnis.
6. Ursachen für Schwierigkeiten beim Erhalten der Disziplin liegen in:
   - unzureichender Zeitplanung,
   - Inkonsequenz beim Stellen von Forderungen,
   - unezakte und unklare Gesprächsführung.
7. Wurde den Schülern zu viel Zeit beim Lösen von Aufgaben gelassen, so kam es zu einem Aktivitätsabfall.
8. Unzureichend ist die Befähigung der Schüler zur geistigen Tätigkeit durch Vermittlung von Methoden und Verfahrenskenntnissen.

Zusammenfassend läßt sich zu diesem Aspekt hervorheben, daß sich deutlich zeigte, daß den Persönlichkeitseigenschaften des Lehrers und den sozialen Beziehungen im Klassenkollektiv ein hoher Stellenwert zukommt. Eine in der Klasse herrschende gute soziale Atmosphäre ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß eine geistig aktive Haltung überhaupt entwickelt werden kann. Sie allein reicht aber nicht aus, wenn die von der didaktisch-methodischen Konzeption der Stunde ausgehenden Möglichkeiten nicht oder nur ungenügend genitzt werden.

Die Arbeit mit Aufgaben läßt sich im Zusammenhang mit der Entwicklung der geistigen Aktivität folgendermaßen beurteilen:

1. Bei einer guten Motivierung der Schüler zum Lösen der gestellten Aufgaben ist eine hohe geistige Aktivität zu erkennen, die Schüler gehen mit Eifer an die Lösung der Aufgabe heren.
2. Ziel-Resultats-Vergleiche bei aufgaben schaffen eine gute voraussetzung zur Aktivierung der Schüler bei nachfolgenden Aufgaben.
3. Von der Möglichkeit der differenzirung (bezogen auf Aufgabenstellung oder Lösengsprozeß) wird noch zu wenig Gebrauch gemacht.
4. Bei etwa 60 % der untersuchten Aufgaben lag ein adäquates Anforderungsniveau vor, bei 30 % wurden Unterforderungen registriert, diese bewirkten zum Teil ein Absinken und zum Teil ein Gleichbleiben der Schüleraktivität. Bei den bei 10 % der Aufgaben festgestellten Überforderungen kam es stats zum Absinken der Aktivität.
5. Bei $\frac{2}{3}$ der Aufgaben gelang es den Lehrern gut, selbständige Schülertätigkeiten zu organisieren, die dabei festgestellte Aktivität war hoch.
6. Bei Sach- und Anwendungsaufgaben traten häufig Schwierigkeiten im Lösungsprozeß auf. Trotz guter Aktivierung durch praxisbezogene Inhalte der Aufgaben kommt es zum Absinken der Aktivität in der Phase der Ansatzfindung, da es vielen Schülern nur schwer gelingt, das mathematische Modell zu finden.
7. Erzieherische Potentzen, die dem Aufgabenlösungsprozeß innewohnen, werden kaum genutzt. Nur in wenigen der hospitierten Stunden wurde darauf eingegangen.
8. Mit 85 % wurden die meisten Aufgaben bei Übungen, Wiederholungen und Systematisierungen (also bei der Festugung) singesetzt. Noch zu wenige Aufgaben (9 %) dienen der Einführung oder Erarbeitung.

Einen weiteren Schwerpunkt stellte die Arbeit mit dem auf dem Auswertungs bogen enthaltenen Aktivitätsdiagramms dar. Zwei Dinge sind hervorhebenswert.

1. Das Aktivitätsdiagramm eignet sich zum Feststellen der durchscnittlichen Aktivität in einzelnem Phasen einer Unterrichtsstunde.

So ergab beispielsweise die Auswertung der Diagramme hinsichtlich der Vorbereitungsphase (Motivierung/Sicherung des Ausgangsniveaus), daß dieser Phase besondere Bedeutung zukommt. Thesenhaft lassen sich folgende Ergebnisse formulieren, die jedoch einer weiteren Bestätigung bedürfen:

a/ Hohe geistige Aktivität in der Vorbereitungsphase sichert, daß der Grad der Aktivität in den darauffolgenden Phasen höchstens um einen Grad niedriger ist.

b/ Im Vergleich zur Vorbereitungsphase lag der Aktivitätsgrad im weiteren Verlauf der Stunde höchstens um einen Grad höher.

2. Auf der Grundlage einer Reihe von Aktivitätsdiagrammen ein und desselben Lehrers ist es möglich, sich einen Eindruck vom methodischen Können des Lehrers hinsichtlich der Entfaltung der geistigen Aktivität seiner Schüler zu verschaffen. Dabei ist es günstig, eine Zuordnung der didaktischen Funktionen und typ. V.situationen im Diagramm vorzunehmen. Wichtig ist jedoch, daß das Aktivitätsdiagramm allein nicht zur Erfassung und Beurteilung der geistigen Aktivität der Schüler ausreicht. Der Auswertungsbogen und das Hospitationsprotokoll sind unentbehriliche Hilfsmittel bei der Interpretation des Kurvenverlaufe.

Obwohl eine breite und umfassende Auswertung des Untersuchungsmaterials noch aussteht, lassen sich doch die drei Richtungen, in denen wir weiterarbeiten wollen, angeben. Wir wollen uns konzentrieren auf:

Fragen und Probleme

1. der Aktivierung leistungsstarker und leistungs-schwacher Schüler	2. im Hinblick aug klassenstufenspe-zifischer Möglich-keiten der Aktivi-rung (am Beispiel "Aufgabenlösen")	3. der Entwicklung der geistigen Aktivität der Schüler in der Abitur-stufe

Innerhalb dieser drei Forschungsschwerpunkte könnten etwa folgende Fragen bedeutsam sein:

Zu 1.:

1/ Welche Möglichkeiten und formen der Aktivierung leistungsschwacher und leistungsstarker Schüler sind für den Mathematikunterricht von besonderer Bedeutung? Welche Maßnahmen der inneren Differenczierung sind anwendbar?
2/ Welche Anforderungen erwachsen aus diesem Aspekt heraus an Motivierung und Zielstellung?
3/ Wie muß die problemhafte Unterrichtsgestaltung angeledt sein, damit leistungsstarke und leistungsschwache Schüler gleichermaßen aktiviert werden?
4/ In welcher Art und in welchem Grade sind Differenzierungen im stofflichen Bereich zu beachten?

Zu 2.:
1/ Welches methodische Vorgehen bewärt sich beim Aufgabenlösen, welcher Zusammenhang besteht zur Aktivität?
2/ Welchen Einfluß übt die Aufgabenstellung (als objektiv Vorgegebenes und als durch den Lehrer methodisch gebrochene Vorgabe) auf die Aktivität der Schüler aus?
3/ Wie muß die analysephase gestaltet werden, um die Schülertätigkeit bestmöglichst zu aktivieren?
4/ Wie ist die Rhase der Rüchkschau zu gestalten?

Zu 3.:
1/ Welche positiven Erfahrungen liegen in der Praxis zur Übergangsproblematik K. 10 -- 11 vor?
2/ Wie ist die geistige Aktivität der Schüler in Theorisstrecken, beim Lösen von Standardaufgaben und beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben ausgeprägt?
3/ Welche praktischen und theoretischen Erfahrungen liegen bzgl. der Erhöhung der abiturstufengerrüßen geistigen Aktivität der Schüler veschiedener Leistungsgruppen vor?
4/ Welchen Beitrag leistet die Erhöhung der geistigen Aktivität für die Entwicklung mathematischen Wissens und Könnens?

Es wird also in der nächsten Etappe unserer Forschungsarbeit darum gehen, neben dem weiteren Aufarbeiten der praxisanalytischen Ergabnisse noch weitere zu einigen Detailfragen notwendigen Untersuchungen in der Schulpraxis durchzuführen und -- und darin besteht die Hauptaufgabe Materialien auszuarbeiten, die dem in der Schulpraxis tätigen Mathematiklehrer helfen sollen, die im LP angegebenen Ziele noch besser zu erreichen und die in den Analysen festgestellten Mängel zu beseitigen.

Dr. pead. Marga Schmidt
Wissenschaftlicher Oberassistent im Wissenschaftsbereich
Methodik des Mathematikunterrichts der Sektion
Mathematik/Physik

Dr. pead. Wolfgang Zillmer
Wissenschaftlicher Oberassistent im Wissenschaftsbereich
Methodik des Mathematikunterrichts der Sektion
Mathematik/Physik

PERGE IMRE

A MATEMATIKAI ANALÍZIS NÉHÁNY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJÁRÓL

A matematika és a filozófia kapcsolata rendkívül sokrétű. E sokrétűség alapját a mindkét tudományban meglevő általánosságra való törekvésben kell keresnünk. A filozófia ugyanis a valóság egészét, nem pedig valamely speciális szakterületét vizsgálja és éppen ez az egyik jellegzetes vonása, amely megkülönbözteti a szaktudományoktól. Hasonlóan a matematika is bizonyos tekintetben a valóság egészét vizsgálja, amennyiben általános és egymástól igen távoleső területeken érvényes közös összefüggéseket tár fel.

Érthető tehát, hogy a filozófia mindig komoly érdeklődést tanúsított a matematika iránt (az ókor filozófusai általában matematikusok voltak, de az újkor filozófusai is szép számmal matematikusok is), és mindig igyekezett a matematika eredményeit a maga rendszerébe beépíteni. Ugyanakkor a mai matematikusok közül is számosan foglalkoznak a filozófiával, közelebbről a matematika filozófiai problémáival.

A matematika filozófiai problémái közül e dolgozatban csak a matematika egy részterületének az analízisnek a legfontosabb és alapvetőbb fogalmainak az elemzését mutatjuk be:

- a függvénykapcsolatok és a valóság jelenségei;
- a végtelen kicsinyek és a végtelen oszthatóság problémája;
- a határérték fogalma;
- a matematikai végtelen

fejezetekben. A szóbanforgó matematikai filozófiai problémák természetesen kapcsolódnak a matematika más fejezeteihez is, ezek részletesebb elemzésétől azonban az alapvető fogalmak jobb megértése céljából eltekintünk.

1. A függvénykapcsolatok és a valóság jelenségei

A "mennyiség" fogalma az az alapfogalom, amellyel a természettudomány, technika bármely területén lépten-nyomon találkozunk. Általában mennyiségen értjük mindazt, ami mérhető és számmal vagy számokkal jellemezhető. Más szavakkal, mennyiségnek nevezünk minden olyan tárgyat, dolgot, amely megmérhető közvetlen módon vagy matematikailag tökéletesített módszerekkel. A mérés legegyszerűbb formája abban áll, hogy a megmérendő tárgy jellegének megfelelő "egységet" választunk, majd meghatározzuk, hogy az egység hányszor "foglaltatik" a mérendő tárgyban. A mérés ezen egyszerű formájának matematikai tökéletesítése és további fejlődése a matematikai analízis számos alapvető fogalmára vezetett, pl. differenciálhányados, integrál stb. fogalmára.

Magában a matematikában, konkrétan az analízisben sem fordulnak elő konkrét mennyiségek, hanem általános elméletei a legkülönbözőbb mennyiségekre alkalmazhatók. Ezt azáltal érhetjük el, hogy a mennyiségek konkrét jellegétől elvonatkoztatunk, absztrahálunk és a tételeket és törvényeket csak azok kvantitatív, számszerű értékeire fogalmazzuk meg. Ennek megfelelően absztrakt mennyiségeket tekintünk, valamilyen jellel, betűvel jelöljük azokat és semmit sem teszünk fel konkrét fizikai vagy más jelentésükről, amellyel azok bírhatnak. Éppen ezért a matematikai elméletek egyforma sikerrel alkalmazhatók bármilyen konkrét mennyiségi vizsgálatnál. Ebben fejeződik ki a matematikai elméletnek az általánossága, univerzitása, amit általában véve absztraktságnak nevezünk és olykor egyesek helytelenül ezen a gyakorlattól és a valóságtól való elszakadást értik. F. Engels így ír ezzel kapcsolatban:
"... Hogy ezeket az alakokat és viszonyokat tiszta alakjukban tanulmányozhassuk, teljesen el kell azokat szakítani tartalmuktól és azt elkülöníteni mint olyat, amely a tárgy szempontjából közömbös."

A nagyfokú absztrakció, amely a matematika lényegéhez tartozik, nem jelenti a valóságos világtól való elszakadást, éppen ellenkezőleg, lehetőséget ad arra, hogy a valóság sokszínű és bonyolult összefüggéseiből a lényeget ki lehessen ragadni és az összefüggéseket szigorú és félreérthetetlen törvényekkel lehessen kifejezni.

Az együttesen vizsgált mennyiségek között gyakran egyesek változnak, mások állandók maradnak. A változás, mozgás első jellemző tulajdonsága annak, amit jelenségnek, folyamatnak nevezünk. "A mozgásban lévő anyag vizsgálata során, amit azonnal megfigyelhetünk, a jelenségek egyetemes, általános és kölrsönös összefüggése kölcsönös feltételezettsége."

A jelenségeket úgy foghatjuk fel, mint egy abban a jelenségben résztvevő valamely mennyiség változását, amely más mennyiségek változásától függ. A változó mennyiségek bevezetése a matematikába, a matematika történetének egyik legjelentősebb pillanatának tekinthető. Erről F. Engels is így ír: "Fordulópont volt a matematikában a Descartes-féle változó mennyiség; ennek köszönhető, hogy a matematikába bevonult a mozgás, a dialektika, és ugyanennek köszönhető, hogy közvetlenül szükséggessé vált a differenciál és integrálszámítás, amely azonnal létre is jön..." (A természet dialektikája 268. old.)

Mint már mondottuk, minden jelenséget, vagy folyamatot mint néhány változó mennyiség kölcsönös változását tekinthetjük. Ez a filozófiai fogalom, felfogás az analízis legfontosabb fogalmára, a függvénykapcsolat fogalmára vezetett. A jelenségek, vagy folyamatok egy bizonyos csoportjának teljesen absztrakt alakja a matematika nyelvén

$$y = f(x) \qquad x(x_1; x_2; \ \ldots \ ; x_n)$$

Az adott folyamatban résztvevő mennyiségek közötti függvénykapcsolat meghatározása és leírása a természettudomány fő feladata. A folyamatban megnyilvánuló és a folyamatra jellemző függvénykapcsolatot a folyamat törvényének is nevezzük, úgy is szoktuk mondani, hogy ez az összefüggés leírja a folyamatot.

A függvény gondolata közelebbről az okozati függés általános elvéből fejlődött ki. Az okság a jelenségek egyetemes törvényszerűségének egyik formája. A tudás elsősorban az okok ismerete. Az ok és okozat fogalmának ismeretében elkülöníthetjük az egységes objektív folyamat ilyen vagy olyan oldalait. "Hogy az egyes jelenségeket megértsük, ki kell ragadnunk őket az általános összefüggésükből és elszigetelten kell szemügyre vennünk őket, akkor a váltakozó mozgások közül az egyik okként, a másik okozatként fog megjelenni". (Engels: A természet dialektikája 241. old.)

Az ok és okozat kölcsönös viszonyban álló fogalmak. Az okság pedig olyan jelenségkapcsolat, amelyben az egyik létezését minden esetben követi a másik létrejötte.

Mint már említettük a függvény, és a funkcionális összefüggés fogalma amely ugyancsak a jelenségek objektív létező összefüggéseit tükrözi, az okozati függésből fejlődött ki.

$$y = f(x)$$

Az ok és okozat összefüggése kölcsönös, a kettő kölcsönhatásban van; nemcsak az történik, hogy az ok létrehozza az okozatot, hanem az okozat aktívan hat az okra, megváltoztatja az okot. A kölcsönhatás folyamán az ok és okozat helyet is cserélhet. Ez adta a gondolatot az inverz függvény bevezetéséhez

$$x = f(y)$$

Végül az is ismeretes, hogy az okozat újabb jelenségek okává válik és így ismétlődve létrejöt az oksági láncolat, amelynek az analízisbeli megfelelője az összetett függvény.

$$y = f_1(f_2(x))$$

A függvényláncolat, amelynek segítségével a függvényt megadjuk természetesen több láncszemből is állhat.

Hangsúlyozni szeretnénk viszont, hogy az ok-okozati összefüggés és a függvénykapcsolat matematikai fogalma között lényeges különbség van. Míg az okozati függés elve feltételezi az összes vagy a legfontosabb tényleges okok kiválasztását, amelyek az ismert okozatra vezetnek, addig a függvénykapcsolat pusztán a mennyiségek közötti kapcsolatot adja meg, annak feltevése nélkül, hogy a mennyiségek közül az egyiknek a változása tényleges oka a másik megváltozásának. Például a levegő hőmérsékletének változása 24 óra alatt számos ok megváltozásának a következménye. A függvénykapcsolat viszont megállapítható egyszerűen a hőmérséklet és a 24 órai időköz között is, jólehet az idő folyása önmagában természetesen nem oka a hőmérséklet változásának, ennek ellenére ez a függvénykapcsolat fontosnak bizonyulhat pl. a fizikában.

A matematikai függvény tehát egyszerűen változó mennyiségek összefüggését szabályozó törvény és semmiféle ok-okozati összefüggés nem következik belőle. Az megint más kérdés, hogy az ok-okozati összefüggés gondolata hozta létre a matematikában a függvények bevezetését. Az ok-okozati összefüggés bizonyos értelemben bővebb, de ugyanakkor szűkebb is mint a függvényfogalom.

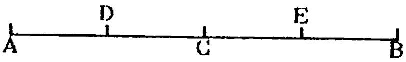
A függvényfogalom segítségével lehet egzakt matematikai módon jellemezni a mozgást is. Ha egy mozgó részecskét, amelynek koordinátája x,y,z, a tér egyetlen pontjába koncentrálunk, és ha a t az idő mértékét jelöli, akkok a részecske mozgását teljesen le lehet írni, megadva x,y,z koordinátáit a t idő függvényeként:

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t)$$

Vigyázni kell azonban arra, hogy bármennyire nélkülözhetetlen és fontos is ez a kapcsolat, abból hogy a P részecske a t időpillanatban a tér (x,y,z) koordinátájú pontjában van a P részecske nyugalmi vagy mozgási állapotára nem lehet következtetni.

2. A végtelen kicsinyek és a végtelen oszthatóság problémája

A "végtelenig" való osztás olyan mennyiségeket szolgáltat, melyek egyre kisebbekké válnak. Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk ezt az eljárást egy adott A B hosszúsági egyenesre. Ezt először megfelezzük (C) a



fél részeket újra kétfelé osztjuk és így tovább határtalanul.

A részek hosszúságát törtszámok fejezik ki.

$$\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \frac{1}{16}\,,\ \ldots$$

A részek száma viszont egyre nagyobb és nagyobb lesz

$$2\,,\ 4\,,\ 8\,,\ 16\,,\ \ldots$$

Hiába halmozzuk az osztásokat, a részek száma sohasem lesz végtelen, és hiába osztjuk újra meg újra valamely részt, az eredmény sohasem lesz nulla. A legkisebb részben is megvan még valami a nagyságból, mert összerakva visszaállítják az eredeti nagyságot. A tiszta nulla azonban bármely nagy számok legyenek is, sohasem szolgáltatnak véges mennyiséget.

Ezek a mennyiségek kiirthatatlanul magukban hordják eredetük jellegét. A végtelen kicsiny vonalat nem szabad összezavarni a végtelen kicsiny felülettel. Az egyetlen eshetőség csak annyi, hogy eredetüknél fogva szomszédos végtelen kicsinyek, amelyek pl. a vonalak világából való végtelen kicsinyek végre olyan közel jutnak egymáshoz, hogy a különbségük is nullához képest végtelen kicsinnyé válik. A végtelen kicsiny egyenes és a végtelen kicsiny görbe között a különbség nemcsak önmagában végtelen kicsiny, hanem hozzájuk képest is az.

Azoknak a végtelen kicsinyeknek, amelyekről az egymáshoz közeledés feltételezhető, egy családba tartoznak, hisz bizonyos lényeges vonás mindegyikükben közösen megvan.

A görbe vonal és az egyenes vonal, ámbár különböző eredetűek, megegyeznek abban a közös tulajdonságban, hogy csak egy kiterjedésük van, ami megengedi, hogy egy kategóriába kerülhessenek és lehetővé teszi végtelen kicsinyek egymáshoz való közeledését.

Összefoglalva tehát a végtelen kicsiny sohasem nulla, mindvégig megőrzi azoknak a mennyiségeknek a jellemvonásait, amelyből származik.

Ezt az eljárást, amit itt ismertettünk, úgy lehet tekinteni, mint "a végtelen oszthatóság" filozófiai elvének matematikai kifejezését.

A "végtelen oszthatóság" elve az időnek és a térnek azt a tulajdonságát fejezi ki, hogy nem atomos, hanem folytonos szerkezetű: nincs legkisebb időtartam, bármely időtartamot részekre lehet osztani, és nincs legkisebb térrész; bármely térrészt kisebb részekre lehet osztani. Az, hogy pl. a valós számok halmaza analóg tulajdonságú, azt jelenti, hogy a valós számok segítségével képesek vagyunk a térben és időben lejátszódó folyamatok (mozgások) mennyiségi összefüggéseinek leírására.

Az, hogy a tér és az idő atomos vagy folytonos szerkezetű-e, igen régi filozófiai vitakérdés. Mai szemmel tekintve azt kell mondanunk, hogy itt nem filozófiai, hanem természettudományos kérdésről van szó. A tér és az idő folytonosságának a feltételezése ugyanis olyan tudományos hipotézis, amely a jelenségeknek nemcsak a magyarázatát könnyíti meg, hanem a jelenségek lefolyásának előrelátását és kiszámítását is lehetővé teszi, s így a gyakorlat számára nélkülözhetetlen.

Az energiáról viszont az derült ki, hogy bizonyos jelenségek esetén a folytonosság feltevése ellentmond a tapasztalatnak. Lehetséges tehát, hogy sem a "folytonos", sem az "atomos" fogalmak önmagukban nem alkalmasak a fizikai mennyiségek hű jellemzésére, ez azonban nyilván nem filozófiai, hanem fizikai probléma.

3. A határérték fogalma

Az analízisben a határérték fogalma alapvető szerepet játszik. Az analízis majd minden fogalmát a határérték segítségével értelmezzük és a határátmenettel, ezzel az általános matematikai operációval kapcsolatosak az analízis műveletei, a differenciálás és az integrál is. Ezért olyan fontos részletesebben foglalkozni a határ, határéték fogalmával.

A közönséges beszédben határ szóval jelöljük azt a választó vonalat, amelyet nem szabad átlépni. Ez a választóvonal azonban elérhető és érinthető.

A matematika nyelvén a határ olyan válaszfal, amelyet nemcsak hogy átlépni nem szabad, de érinteni is tilos, csupán közeledni lehet hozzá. A távolság tetszés szerint csökkenthető, de szigorúan véve sohasem semmisülhet meg. A végtelen kicsinyek határa a nulla: folyton közelednek feléje, de el nem érik soha.

A matematikai határ fogalma tehát szükségképpen felkelti a végtelen kicsiny eszméjét, avagy helyesebben a végtelen kicsiny elválaszthatatlan a határtól, megjelöli azt a távolságot, amely közte és a közelébe jutott tárgy között van. Kölcsönösen kiegészítik és feltételezik egymást. Dialektikus egységet alkotnak.

Pl. valamely kör azon beírt és körülírt sokszögek határa, amelynél az oldalak száma minden határon túl növekszik. A beírt és körülírt sokszögek között, valamint a köztük és a kör között lévő különbség ugyanis kisebbé válhat minden adott nagyságnál.

De, valamely kör átmérője már nem lehet határa pl. a húroknak, mert semmi sem zárja ki, hogy ezek a húrok a kör középpontján menjenek keresztül és átmérővé váljanak. Valamely kör húrjának az ismerete semmi újat nem mond az átmérőről, mert közös a természetük, egy a lényegük. Egyszerűen a kisebbnek és a nagyobbnak a kérdése.

Egészen másképpen áll a dolog a sokszögre és körre vonatkozóan. E két tárgy természeténél fogva különbözik egymástól. A kör nem valami kisebb vagy nagyobb oldalszámú sokszög, nincsenek oldalai. Bármily sok oldala legyen is egy sokszögnek, mégsem lesz soha kör, -- megmarad mindig sokszögnek. Másrészt azonban a sokszög folyton közeledik a körhöz és a köztük lévő különbség kisebb lehet minden adott nagyságnál, elenyészővé válik.

Ez a végtelen kicsinyekkel való számítás célja. Mindig az a tárgya, hogy a határok módszereit vagy valamely analóg eljárást alkalmazva, két különböző természetű dolgot állítson egymás mellé. Az egyik már ismert, a másikról még nem tudjuk, hogy hogyan férkőzzünk hozzá. Ha feltehetjük, hogy a két tárgy mind jobban és jobban "szomszédja" lehet egymásnak, a probléma meg van oldva és ismertté válik számunkra.

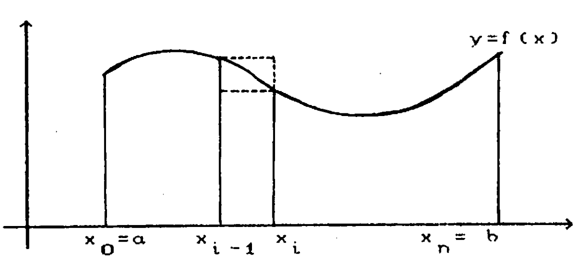
Így áll elő az a látszólag paradox eredmény, hogy az egyik tárgy ismerete hozzásegít a másik tárgy ismeretéhez, éppen annál az oknál fogva, mert különböző természetűek. Az eljárás titka határtalan közelíthetőségükben rejlik.

Szükséges, hogy minden határ és a hozzá közeledő változó tárgy között legyen valami szerkezeti egyenlőség. Egy vonal pl. nem lehet a határa valamely felületnek vagy erőnek. A vonalnak vonal, a területnek terület a határa. Példák: a differenciálhányados

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

az adott $y=f(x)$ fv. x_0 pontbeli érintő iránytangense, amelyet a szelők ismert iránytangenseinek segítségével határozhatunk meg, vagy fizikai értelmezés szerint az ismert átlagsebességek segítségével meghatározott x_0 időpontban vett pillanatnyi sebesség stb.

A határozott integrál, vagyis az



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) =$$

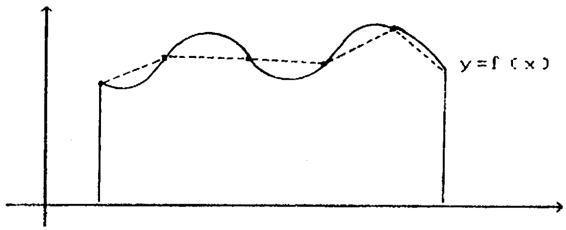
$$= \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ahol $m_i = \min\limits_{x \in [x_i \; x_i]} f(x)$,

$M_i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ és

$m_i \le f(\xi_i) \le M_i$

határértékek, pl. a jelzett téglalapok területe összegeinek segítségével, az adott intervallum felosztásának finomításával egyre jobban megközelíti határát, amely ugyancsak terület, a függvény alatti terület.



A görbe vonal ívhossza a beírt poligonok hosszának határa, midőn a felosztást minden határon túl finomítjuk stb.

Valamennyi példánál megfigyelhető, hogy a két tárgy alapjában véve logikailag különbözik egymástól, és a különbség meg is marad, függetlenül nagyságuk vagy kicsiny voltuk fokától. Egy szelő és érintő, egy egyenes és görbe vonal, egy sík és egy görbült felület stb. logikailag különbözik, más minőség.

A matematikai határ első feltétele tehát az, hogy legyen az értelmezésben valami olyan sajátosság, elem, amely "összeférhetetlen" a második értelmezésével.

Szükséges azonban még az is, hogy az az elem, amely összeférhetetlen a második értelmezésével, tetszés szerint változtatható legyen (mennyiségi változás), amíg csak el nem jutunk a teljes közeledés fokához. (Új minőség).

A határok mechanizmusa általában tehát azon alapszik, hogy az összeférhetetlenséget kifejező elemet változtathatjuk.

A meghatározás értelmében a változó tárgy nem közeledhet egyszerre két különféle határhoz, de ugyanakkor több eredetileg különböző változó tárgy tarthat ugyanazon határ felé, melynél ha elérhetnénk, vége volna a köztük lévő különbségnek.

Egyazon határt több, különböző úton is meg lehet közelíteni. Ennek pedig igen nagy jelentősége van. Mert ha a változó, amelyet kiválasztottunk, hogy valamely határ tulajdonságába bepillantást engedjen, nem elégít ki bennünket, vagy ha a vele való művelet nagyon bonyolult és sok fáradtságot kíván, szabad ezt elvetni és egy másikkal pótolni, amelynek ugyanaz a határa mint az elsőnek, de jobban megfelel célunknak.

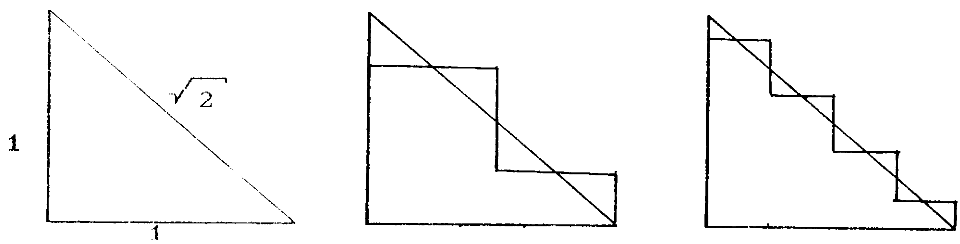
Mindezen gondolatok testesülnek meg a

$$\lim_{x_n \to x_o} f\left(x_n\right) = A \qquad x_n \neq x_o$$

definícióban.

A határérték fogalma tehát egy igen fontos dialektikus mozzanak bevonulása a matematikába, olyan lépés, amellyel a matematika a keletkezés, és az elmúlás, a változás folyamatának egy mennyiségi mozzanatát megragadva, új minőségek megismerésére ad lehetőséget.

Vigyáznunk kell azonban a minden határon túl való közelítéssel is, a szemléletes okoskodás durva hibákra vezethet. Tekintsünk pl. egy egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Legyen a befogója egységnyi. Pythagorasz tétele szerint a háromszög átfogója $\sqrt{2}$ egység. Közelítsük meg e háromszög átfogóját az alábbi "törött vonallal"; először fölfelé haladunk 1/4 egységnyit, azután jobbra 1/2 egységnyit, azután fölfelé 1/2 egységnyit, megint jobbra 1/2 egységnyit, végül fölfelé 1/4 egységnyit.



Ha a lépések számát megkétszerezve az eljárást minden határon túl folytatjuk, akkor a törött vonalak egy sorozatához jutunk.

$$L_1, L_2, L_3, \ldots .$$

Ez a sorozat egy határgörbéhez tart, az eredeti háromszög átfogójához. A határgörbe hossza így $\sqrt{2}$. Viszont

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 2, \quad \ldots, \quad L_n = 2$$

A határoló szakasz csak látszólag a derékszögű háromszög átfogója, valójában nem.

4. A matematikai végtelen

Az emberiség világról szerzett ismeretei a történelem során fokozatosan gyarapodtak. Tapasztalataink azonban egyre-másra, itt is, ott is összeütközésbe kerületek egy lezártnak tekintett világképpel, ami fokozatosan a világ kimeríthetetlenségéről és végtelenségéről szóló nézetek kialakításához vezetett. A végtelenség fogalma kiterjed a térre, az időre, a dolgok és a jelenségek összefüggésére és magára a megismerés folyamatára is.

A végtelenség az anyagi világ létezési formáinak, a térnek és az időnek objektív tulajdonságait fejezi ki.

A végtelenség és a végesség fogalma csak a metafizikus gondolkodás számára jelent feloldhatatlan ellentétet. A valóságban a mélyebb, tudományos megismerés azt bizonyítja, hogy az anyagi világban semmi sem abszolut véges, mert a konkrét anyagi tárgyak és folyamatok más jelenségekké, folyamatokká való átalakulásukkal állandóan meghaladják a végességet és a térben és időben végtelen örök anyagi világot alkotják.

A matematikai végtelen a világszemléleti -- filozófiai végtelen fogalmának mennyiségi -- formái kifejeződésre, amely visszahat a filozófiai végtelen fogalmának fejlődésére, a matematikán belül pedig önállóan is tovább fejlődik.

A matematikusok is jó kétezer éve harcolnak a végtelennel. Nem tudják abbahagyni ezt a harcot, hisz munkájukban nélkülözhetetlen szükségük van rá. A matematikában nincs egy univerzális végtelen, több fajtája is van (alg.-i, geometriai stb.). A matematikában is többnyire jelzőként lép fel a végtelen, esetenként más és más, de mindig szabatosan körülhatárolt jelentésben. Használata azonban mindig összhanban van a "végtelen" világszemléleti jelentésével.

A matematikának természetesen nem feladata a "végtelennek mint olyannak" a definiálása. A matematika feladata e tekintetben csupán annyi, hogy saját keretein belül szabatosan definiálja a "végtelen" jelzők használatát.

A végtelen a szemléleten kívül eső fogalom vizsgálatához, elemzéséhez csak gondolati eszközökkel lehet közeledni. Ezért jelentősek a filozófia számára azok a matematikai eredmények, amelyek a végtelennel kapcsoltosak. Ezen eredmények némelyikének már bizonyos közvetett tapasztalati ellenőrzése is lehetséges a matematika alkalmazásán keresztül.

A végtelen fogalmának legegyszerűbb matematikai fellépése a természetes számok sorozatának végtelensége (bármely természetes számnál van nagyobb természetes szám). Ez a fajta végtelen a filozófiában a potenciális végtelen, ami egy folyamat korlátlan továbbfolytatásának a lehetőségét jelenti. Ilyen pl. az idő is, de két irányban.

A potenciális végtelen megjelenési formája a matematikában általánosan a végtelen sorozat. Végtelen sorozathoz úgy jutunk, hogy minden természetes számhoz hozzárendelünk egy és csak egy dolgot, amit az

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ a_n\ ,\ \ldots$$

szimbolummal jelölünk.

Igen nagy jelentőséget tulajdonít a matematika a végtelen sorozat tagjaiból képzett

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

úgynevezett végtelen sornak is, ami végső soron az összeadás általánosítása végtelen sok tagra. Nincs tervünk itt a végtelen sorozatok és sorok elméleltével foglalkozni, azokat ismertnek tételezzük fel. Szeretnénk viszont ezeknek egy pár filozófiai vetületét felsorolni.

Elsőként azt mutatjuk meg, hogy a végtelent nem lehet úgy kezelni, mint a végest. A végesre jellemző tulajdonságok nem minden esetben vagy egyáltalán nem érvényesek a végtelenre. Vagyis a véges tulajdonságait nem lehet csak úgy mechanikusan alkalmazni a végtelenre, de ugyanakkor azt is világosan kell látni, hogy bizonyos tulajdonságok a végtelenre is jellemzők éppúgy, mint a végesre.

A matematikai végtelen fogalmát kifogástalan logikus formában csak a XIX. században tisztázták. Hogy kellőképpen értékelni tudjuk, hogy milyen problémákkal birkóztak, lássunk néhány példát.

Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$$

Csoportosítsuk a sor tagjait így

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

A tagokat azonban másképpen is csoportosíthatjuk:

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots =$$
$$= 1 - 0 - 0 - \dots = 1$$

Megint másképpen csoportosítva a tagokat

$$S = 1 - (1-1+1-1\pm\dots) = 1 - S$$

Innen $2S = 1$, vagyis $S = \frac{1}{2}$

Úgy látszik, ennek a végtelen sornak az összege háromféle is lehet, 0 vagy 1, vagy 1/2. Magát Leibnizet is, aki egyike volt a XVII. század legnagyobb elméinek, és aki Newtonnal együtt a diff. és integrálszámítást felfedezte, zavarba hozta ez a végtelen sor. Ő úgy okoskodott, hogy mivel ennek a sornak a határértéke egyaránt valószínűen 0 és 1, a helyes határéték a két szám számtani közepe, 1/2 .

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a XIV. században egy "matematikus" a fenti példával akarta matematikailag igazolni, hogy a "világgot semmiből is lehetett teremteni", hiszen a nullából milyen egyszerű 1-et teremteni.

Ugyanis a nulla

$$0 + 0 + 0 + \dots$$

így is írható

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots ,$$

vagy más alakban

$$1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots ,$$

illetve

$$1 - (1-1) + (1-1) + \dots = 1$$

ami mégis valami.

Lássunk még egy, Bolzanótól származó példát:

Legyen

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 \pm \dots$$

Akkor

$$S = 1 - 2\,(1-2+4-8+16-32\pm\dots) = 1 - 2\,S ,$$

vagyis így

$$3\,S = 1 \qquad \text{és így} \qquad S = \frac{1}{3} .$$

Másrészt így is írhatjuk:

$$S = 1 + (-2+4) + (-8+16) + (-32+64) + \dots =$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \dots$$

és eszerint S a végtelenhez tart.

Sőt

$$S = (1-2) + (4-8) + (16-32) + \dots = -1 - 4 - 16 \dots$$

pedig a minusz végtelenhez tart.

Mindezen ellentmondások azzal magyarázhatók, hogy a végesben, azaz véges összegre alkalmazható zárójelezés és zárójelfelbontás szabályát mechanikusan alkalmaztuk végtelen összegre is. Pedig csak konvergens sorokat lehet zárójelezni, azaz több tagot egyetlen taggá összevonni, ezzel sem a konvergenciaviszonyokat, sem a sorösszeget nem változtatjuk meg.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$$\frac{1}{2} S = 1$$

$$S = 2$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{3}{4}} = 2$$

Tehát divergens sorokat zárójelezve hamis eredményre juthatunk, a fordított eljárás (zárójelfelbontás) pedig még konvergens végtelen sorok esetén sem lehetséges.

Megemlítünk még egy példát a kommutativitás mechnikus alkalmazására. Vizsgáljuk az alábbi konvergens sort:

$$L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2$$

Azt "várnánk", hogy konvergens sorok esetén érvényes a kommutativitás. A csoportosítás törvénye is érvényes! Csakhogy a végtelen nem ilyen "egyszerű".

Szorozzuk végig az eredeti sort 2-vel

$$2\,L = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} \pm \ldots \quad , \quad \text{vagyis}$$

$$2\,L = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \pm \ldots \quad .$$

Csoportosítsuk ezután a tagokat úgy, hogy az egyenlő nevezőjű törtek egymás mellé kerüljenek.

$$2\,L = (2-1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \ldots$$

Tehát

$$2\,L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

Itt azonban a jobboldalon éppen az eredeti sor áll, vagyis L, a baloldalon pedig $2\,L$.

Összefoglalva tehát ellentmondáshoz azért jutottunk, mert a véges ismert tulajdonságait a végtelenre is alkalmazni akartuk, ezeket azonban általában nem lehet átvinni a végtelenre. Ugyanakkor azt is világosan látni kell, hogy egyes végesre igaz tulajdonságok a végtelenben is érvényben maradhatnak, továbbá, hogy a végtelen és véges ellentmondása olyan új ismeretekhez vezet, amelyet a véges nem feltételez, mivel végtelen, de ugyanakkor éppúgy viselkedik mint a véges. (Lásd abszolut konv. sorok). Természetesen nem azt akarjuk mondani, hogy a végtelen ilyen, de ilyen is lehet.

A matematika azonban nem éri be csak a potenciális végtelen fogalmával. Amikor pl. egy intervallum összes valós számairól vagy egy nem véges halmaz elemeiről beszélünk, akkor nem csupán arra gondolunk, hogy akármeddig sorolhatnánk a halmaz elemeit, hanem arra is, hogy e halmaz egyszer s mindenkorra adott, befejezett, kész, már nem lehet hozzátenni sem elvenni belőle anélkül, hogy a halmaz meg ne változna. Ez a fajta végtelenség az aktuális végtelen. A végtelen halmazok az aktuális végtelen matematikai megfelelői.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Engels: A természet dialektikája. Bp. 1952.
2. Engels: Anti-Dühring. Bp. 1950.
3. Alekszandrov. A.D.: A matematika általános szemszögből
   Szovjet tanulmánygyűjtemény I. kötet
4. Kedrov: A modern természettudományok filozófiai problémái
   Bp. 1962.
5. Ruzsa: A matematika néhány filozófiai problémájáról. Bp. 1966.
6. Kónya: A matematika tárgya és helye a tudományok rendszerében.
   ACTA Universitatis Debreceniensis 1965.
7. Rényi: Dialógusok a matematikáról. Bp. 1965.
8. Perge: A matematika helye a tudományok rendszerében
   ACTA Academiae Agriensis. 1972.
9. Struik: A matematika rövid története. Bp. 1958.
10. Szász: A differenciál és integrálszámítás elemei. Bp. 1951.
11. Kalmár: A matematika alapjai (egyetemi jegyzet)

SZEPESSY BÁLINT

A HALMAZELMÉLET NÉHÁNY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJA

A tanárképző főiskolán a "Matematikai bevezetés" c. tantárgy keretében oktatott halmazelméleti anyag filozófiai vonatkozásairól

Az 1984-ben bevezetett tantervet megelőzően a halmazelmélet elemeit az "Algebra és számelmélet" c. tantárgy keretében tanítottuk első- és másodéves főiskolai hallgatóknak. 1984-től a "Matematikai bevezetés" elnevezésű tantárgyba került át. Ezt a tantárgyat -- amelynek jelentős része halmazelmélet -- egy féléven át heti 4 órában oktatjuk hallgatóinknak.

Ebben az összeállításban a halmazelmélet néhány filozófiai problémájával foglalkozunk. Nem térünk ki a halmazelmélet alapvető fogalmainak, tételeinek ismertetésére, hiszen ezeket a főiskolai tankönyvek tartalmazzák. A dialektikus materializmust, annak alapvető tételeit is ismertnek tételezzük föl. Az említésre kerülő filozófiai vonatkozások sem mélységükben sem összességükben nem teljesek, már csak azért sem, mert a halmazelmélet filozófiai vonatkozásai szinte kimeríthetetlenek. Az összeállítást a halmazelméleti alapok oktatása során a filozófiai vonatkozások hangsúlyozásához egy kiindulási alapnak szánjuk, amely a hallgatók dialektikus materialista gondolkodásmódjának kialakításához, illetve rögzítéséhez nyújt segítséget, (eredeti összeállításunk bővebb és részletesebb).

1/ G. Cantor a XIX. század második felében dolgozta ki a halmazelméletet. Ebben az elméletben alapfogalom a halmaz fogalma, amely nem más mint annak a kapcsolatnak az absztrakt megfogalmazása, amely bizonyos dolgokból álló együttes és maguk az együttest alkotó dolgok között fennáll. Ebből a fogalomból kiindulva Cantor kidolgozta a halmazelméletet.

Az oktatás folyamatában a halmaz fogalmának kialakítása után összehasonlítást szoktunk tenni a halmazelméleti és a köznapi értelemben használt halmazfogalom között. A két fogalom közötti főbb eltérések a következők:

- A halmaz nem azonos elemeinek összességével, hanem önálló gondolati objektum, az elemeinek a gondolati burka.
- A halmaz valamely elemének vagy elemeinek része vagy tulajdona a halmaznak csak akkor eleme, ha ezt a halmaz definíciója kimondja (például a háromszögek halmazának a háromszögek súlyvonalai nem elemei).
- Nem kell a halmaz elemeinek egyneműeknek lenni.
- Egy halmaznak akármilyen "sok" vagy "kevés" eleme lehet.
- A halmazfogalom megengedi olyan halmaz létezését is, amelynek egyetlen eleme sincs (üres halmaz). (Az üres halmaz fogalmát mind köznapi, mind tudományos értelemben használjuk.)
- A halmaznak akár végtelen sok eleme is lehet.

Álljunk meg itt néhány gondolat erejéig!

Mint ismeretes az emberiség fokozatosan a gyakorlat útján jött rá, hogy a lezártnak, véglegesnek tekintett világkép nem állja meg a helyét, s fokozatosan a világ kimeríthetetlenségéről, végtelenségéről szóló nézetek terjedtek el. Bár az érzéki tapasztalat nem halad túl a végesen, akár a térről, az időről, a dolgok és jelenségek egyetemes összefüggéséről van szó, de a tapasztalat tanúsítja, hogy van tovább is. Így alakult ki a végtelen filozófiai fogalma a térre, az időre, a megismerésre vonatkozóan. A matematikában nincs univerzális végtelen. Mint a filozófiában, úgy a matematikában is a végtelen jelzőként szerepel, esetenként más és más, de mindig szabatosan körülhatárolt jelentésben. A matematikai végtelen a filozófiai végtelen mennyiségi, formai kifejeződése, amely visszahat a filozófiai végtelen fogalmának fejlődésére, s a matematikán belül önállóan is tovább fejlődik. A végtelen tapasztalaton, szemléleten kívül eső fogalom vizsgálata csak gondolati úton, gondolati eszközökkel lehetséges.

A végtelen fogalmának legegyszerűbb matematikai fellépése a természetes számok sorozatának végtelensége. Ez a fajta végtelen megfelel annak, amit a filozófiában potenciális végtelennek neveznek. Ez egy folyamat korlátlan folytatásának a lehetősége. (Ez a végtelenség mint modell szerepet játszott a tér és idő végtelenségére vonatkozó nézetek fejlődésében is.) A halmazelméletben a potenciálisan végtelen fogalma mellett megjelenik az úgynevezett aktuális végtelen fogalma is.

Egy végtelen halmazon azt is értjük, hogy a halmaz készen, lezártan tartalmaz végtelen sok elemet, már nem lehet hozzátenni, elvenni belőle úgy, hogy a halmaz meg ne változna. Ez a végtelen Arisztotelész nyomán az aktuális végtelen.

A végtelen halmazok az aktuális végtelen matematikai megfelelői.

Az aktuális végtelennek, azaz a végtelen halmazoknak semmiféle empirikus vizsgálata nem lehetséges, hiszen ezek is a matematikai fogalomalkotás termékei.

A halmazelmélet jelentős részét a végtelen halmazok vizsgálata képezi.

- A halmaznak bármik lehetnek az elemei (köznapi értelemben halmaznak csak anyagi dolgok az elemei).

Itt is meg szoktunk állni néhány gondolat erejéig.

Az ember matematikai fogalomalkotó tevékenységének kiinduló bázisát az anyagi világban meglévő és a munkafolyamat során fellépő bizonyos természeti összefüggések képezik. A fejlődés során egyrészt társadalmi igények, másrészt a matematika belső fejlődése olyan feladatokat vetett fel, amelyeket a természetből leolvasott matematikai struktúrák keretében nem lehetett megoldani. Ekkor működésbe lépett az emberi fantázia. A természeti összefüggésekből absztrahált halmaz fogalmát kibővítették olyan új fogalmakkal, amelyek lehetővé tették a felmerült problémák kezelését, s elősegítette a matematika további fejlődését is. Az új fogalmak persze a tapasztalati eredetű fogalmakhoz kapcsolódtak és a rájuk vonatkozó igazságokat a tapasztalati fogalmakra érvényes igazságokból merítették. Az ember letér a tapasztalati útról, majd oda visszatérve útjának eredményét hasznosítja. ("Az eleven szemléletből az elvont gondolkodáshoz, és ettől a gyakorlathoz -- ez az igazság megismerésének, az objektív realitás megismerésének dialektikus útja". Lenin művei 38. köt. 155. old.).

Ez az út csak akkor járhat sikerrel, ha nem bánunk önkényesen a bevezetett fogalmakkal, a tapasztalati eredetű fogalmak legáltalánosabb, legalapvetőbb tulajdonságait visszük át az új fogalomra.

A halmazt eredetileg természeti összefüggésekből absztraháltuk, de ezen túlléptünk amikor azt mondjuk, hogy a halmaznak bármik lehetnek az elemei. Ez az egyszerű fogalombővítés problémákat okozott. Látni fogjuk, hogy az általánosított halmazfogalomra a halmaz tapasztalati fogalmából csak a legegyszerűbb igazságokat fogadhatjuk el, és persze azokat, amelyek ezekből logikai úton levezethetőek.

2/ Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz azonos. Halmazok egyenlőségének definiálása után a halmazok körében végzett műveleteket, ezek tulajdonságait vizsgáljuk. A halmazelméleti tételek jelentős része különböző "nevű" halmazok azonosságát, egyenlőségét állítja (Pl:
$H \cup K \equiv K \cup H$, $(H \cup K) \cap L \equiv (H \cap L) \cup (K \cap L)$, stb.)
Az azonosság fogalmát a halmazelmélet is a formális logikából kölcsönözte. A formális logika az azonosság fogalmát két meghatározó tulajdonsággal jellemzi;

- minden dolog azonos önmagával
- ha a két dolog azonos egymással és az egyiknek megvan valamely tulajdonsága, akkor a másiknak is megvan az a tulajdonsága.

Eszerint minden halmaz önmagával azonos, sőt az azonosság logikai fogalmának megfelelően minden halmaz csakis önmagával azonos. Így ha két halmaz egyenlő egymással, akkor már nem is két halmaz, hanem egy. Persze ebből nem következik az, hogy halmazok azonosságának megállapítása egyszerű dolog. Egy halmazt elemei határoznak meg; de nem mindig úgy definiálunk egy halmazt, hogy felsoroljuk az elemeit (ez sok esetben kényelmetlen, ha végtelen sok van, akkor lehetetlen), hanem elemeit valamilyen tulajdonsággal írjuk le. Két vagy több tulajdonságnak lehet ugyanaz a terjedelme, így mód lehet ugyanazon halmaz többféle megadására. Annak fölismerése, hogy két különböző tulajdonsággal definiált (különböző nevű) halmaz ugyanaz, gyakran komoly munkát igényel.
Halmazelméletben halmazok azonosságát (egyenlőségét) gyakran úgy mutatjuk ki, hogy megmutatjuk: az egyik halmaz minden eleme, eleme a másiknak is és fordítva a másik halmaz minden eleme eleme az elsőnek is. (Ugyanis egy halmaznak csakis olyan tulajdonságait vesszük figyelembe a halmazelméletben, amelyek vissza vezethetők arra a tulajdonságra, hogy egy vagy több dolog a halmaz eleme. Ily módon, ha két halmaznak azonosak az elemei, akkor tulajdonságaik is megegyeznek.)
Mivel az anyagi valóság változik, azért nincsenek olyan tárgyak, amelyek

önmagukkal abszolut azonosak lennének még lényeges alapvető tulajdonságokban sem. Az azonosság nem elvont, hanem konkrét, vagyis belső különbségeket ellentmondásokat tartalmaz, állandóan "megszüntetve megőrzi" magát az adott feltételektől függő változás folyamatában. A tárgyak azonosítása, de akár halmazok azonosítása is előzetes megkülönböztetésüket feltételezi (lásd az említett tételeket).
Ez azt jelenti, hogy az azonosság, az egyenlőség elszakíthatatlanul összefügg a különbözőséggel és relatív.
A dolgok minden azonossága időleges jellegű. A halmazelméletben, de általában az absztrakt tudományokban az elvont a dolgok fejlődésétől elvonatkoztatott azonosságot azért használják, mert a megismerés folyamatában bizonyos körülmények között szükséges a valóság idealizálása. Tehát az azonosság mint filozófiai kategória a dolgok létezésének egy mozzanata, amely semmiképpen sem abszolut, de adott körülmények között meghatározó.
A mozgásban lévő világ jelenségeinek leírására az azonosság fogalma nem elegendő. Az azonosságok figyelembevétele nélkül azonban nincs emberi cselekvés, tudományos tevékenység.
Az azonosság akkor értékes, amikor különböző dolgok azonosságát állítja. Mint említettük a halmazelméletben is ezt tesszük. Az azonosság viszonylagosságát a halmazelmélet alkalmazásánál kell figyelembe venni.

3/ A részhalmaz és a valódi részhalmaz tárgyalása során a következőket érdemes kihangsúlyozni.

A halmazelméleti rész, a részhalmaz fogalma eltér a köznapi és filozófiai rész fogalmától. A halmazelméletben az egész is része önmagának. A köznapi és filozófiai értelemben használt rész megfelelője a valódi rész. Az eltérés oka az, hogy sokszor két halmaz közötti kapcsolatról csak annyit tudunk, hogy egyiknek minden eleme a másiknak is eleme, de a fordított tartalmazásra nincs információnk. A rész halmazelméleti fogalma: lehet hogy része, lehet hogy azonos vele. Azt, hogy egy halmaz valódi része a másiknak, úgy is kifejezhető, hogy az első része a másodiknak, de nem azonos vele. A véges halmazok és valódi részhalmazai körében érvényes a filozófiai egész és rész jól ismert dialektikus kapcsolata. Ennek illusztrálására idézünk Afanaszjev: "Az egész és részek dialektikájából" néhány mondatot.

"A világban tehát az anyagi képződmények szövevényes összefonódását, kölcsönhatását találjuk; e képződmények mindegyike egész az őt alkotó részekhez képest és rész ama egészhez viszonyítva, amelynek felépítésében alkotóelemként jelen van. Mindamellett a rész nem lehet egész önmagához képest, valamint ahhoz az egészhez képest, amelynek része. Az egész pedig nem lehet saját magának része, valamint részeinek a része".
Azt mondtuk, hogy véges halmazok körében érvényes az egész és rész dialektikus kapcsolata. Mi a helyzet a végtelen halmazok körében? Ezekről később szólunk.

4/ A halmazok számossága című anyagrész rengeteg filozófiai kérdést vet fel:

Legyen adott a halmazoknak egy R rendszere. Az R két halmazát -- mint tudjuk -- akkor nevezzük egyenlő számosságúnak, ha a két halmaz ekvivalens, vagyis, ha létezik egyik halmaznak a másikra való bijektív leképezése. A bijektív leképezéssel megtaláltuk azt az utat, amelynek segítségével véges halmazok számosságát meg tudjuk állapítani anélkül, hogy azokat megszámlálnánk. Véges halmazok esetében nem lényeges milyen módon történik a leképezés, véges halmazok összehasonlításánál a bijektív leképezés módja nem játszik szerepet. Ismeretes, hogy a halmazok számosságának azonossága ekvivalenciareláció. Egyenlő számosság alapján képezett egyes ekvivalenciaosztályokat véges halmazok esetén természetes számoknak nevezzük.
Valamely véges A halmazt akkor tekintjük egy B halmaznál, kisebb számosságnak, ha A ekvivalens a B halmaz egy valódi részhalmazával. Ekkor B halmazt nagyobb számosságúnak is nevezzük. Tudjuk, hogy ez a reláció rendezési reláció. Az is nyilvánvaló, hogy egy adott halmaz több elemmel rendelkezik bármelyik valódi részénél. Azaz a véges halmazok körében érvényes az a megállapítás, hogy az egésznek szükségszerűen nagyobbnak kell lennie a résznél. Persze halmazok körében a kisebb fogalmat nem is definiáltuk, csak számosságukra. Pontosabban tehát csak azt tudjuk mondani, hogy egy véges halmaz valódi részhalmazának számossága mindig kisebb a halmaz számosságánál.

A véges halmazok vizsgálata tehát a természetes számokhoz vezetett. A természetes számok összeadása, szorzása halmazok közötti műveletekre

vezethetők vissza. Ismert, hogy halmazműveletek tulajdonságaival igazolhatóak a természetes számok összeadásának, szorzásának tulajdonságai is. A természetes számok aritmetikájának ismeretében a természetes számokból felépíthetjük az egész és racionális számokat, ahogy ezt a főiskolai algebra oktatása során tesszük. A természetes számokra, az egész és racionális számokra vonatkozó tételek halmazelméleti tételeknek is tekinthetők. Ezek filozófiai vonatkozásaival ebben az összeállításunkban nem foglalkozunk, hiszen az "Algebra és számelmélet filozófiai vonatkozásai" -- című gyűjteményünk ezekre már kitért.
Most mi a továbbiakban a végtelen halmazok vizsgálatát állítjuk előtérbe. A számosság fogalmának ismeretében érdemes (gyakorlati órán) néhány filozófus és matematikus véleményét ismertetni az aktuális és potenciális végtelenről:
Már Arisztotelész analizálta a potenciális és aktuális végtelen közötti különbséget. Csak a potenciális végtelen létjogosultságát ismerte el; elvetette az aktuális végtelen fogalmát. Abból, hogy minden lépés után van rákövetkező lépés -- akár számolásban, akár szakasz osztásban -- nem következik, hogy van utolsó "végtelenedik" lépés, azaz, hogy jogosult akár a természetes számok összességéről (halmazáról) mint egyszer s mindenkorra kész befejezett összességről, halmazról vagy akár egy szakasz pontjainak összességéről, mint sok lépésen át végzett osztás eredményeként kapott pontok összességéről beszélni. A matematikusok egészen a múlt századig mereven ragaszkodtak ehhez a felfogáshoz. Ennek következtében olyan történelmi korlátokat teremtettek, amelyek a végtelen halmazok kutatásának évezredekig útjában álltak.

A XVI. században Galilei adott hangot egy érdekes gondolatnak. Ő minden természetes számhoz hozzárendelte ennek a számnak a négyzetét. Ilyen módon egyetlen természetes szám és egyetlen négyzetszám sem maradt pár nélkül. Tehát a természetes számok halmazának egyik valódi részhalmazához való kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése jött létre. Ebből azonban Galilei nem azt a következtetést vonta le, hogy mind a két halmazhoz ugyanazt a számosságot kell hozzárendelni --, hanem visszariadt ettől az ellentmondástól, és úgy vélte a végtelenben feloldódnak az összes különbségek.

Leibniz és Spinoza ugyancsak behatóan foglalkoztak a végtelennel.

Spinoza tisztán deduktív módon geometriai módszerrel felépített Ethikájában így fogalmazta meg véleményét:

Csak egy szubsztancia van és ez a végtelen.

Az ebből levont következtetések során olyan ellentmondásokba keveredett, amelyek nagyrészt a potenciális és aktuális végtelen összekeverésén alapultak.

Kant is különbséget tett a végtelen két fajtája között. Az arisztotelészi aktuális végtelen merev elvetésével nem értett egyet. Elfogadja a potenciálisan végtelent, de az aktuális végtelen fogalmát, mint intuitív a priori matematikai konstrukciót mégis csak elveti.

Az aktuálisan végtelen fogalmát nem tartja logikailag ellentmondásosnak mint Arisztotelész, csupán intuitív konstruálhatóságát vonja kétségbe. S mivel az ő idejében az aktuális végtelen fogalma nem létezett ellentmondásokba keveredett. Ezen ellentmondások miatt is vallotta a világnak, mint egésznek alapvető megismerhetetlenségét.

Hegel szerint -- akinek lét-tanában terjedelmes helyet foglal el a végtelen elemzése -- semmi fenntartása nincs az aktuális végtelennel szemben sőt szerinte az az igazi végtelen a potenciálisan végtelen csak befejezetlen "rossz" végtelen.

Engels: "A matematikai végtelen a valóságból van merítve, ha tudatlanul is és ezért csak a valóságból és nem önmagából a matematikai elvonatkoztatásból magyarázható meg. És ha a valóságot ebből a szempontból vizsgáljuk, akkor megtaláljuk azokat a valóságos viszonyokat is, amelyekből a matematikai végtelenségi viszonyt is merítették, sőt annak a matematikai módnak a természetes analógonját is, amellyel ezt a viszonyt működtették."

Az 1800-as évek elején Bolzano idézte fel először Gelilei gondolatát a "Végtelen paradoxonjai" -- című írásában. Így gondolkodott:

Legyen egy B pont egy AC szakszon, például annak a középpontjában. Mozogjon az X pont egyenletes sebességgel A-ból B-felé, vele egyidejűleg az Y pont kétszer akkora sebességgel fussa be az AC szakaszt! Mialatt X az AB szakaszt megteszi Y befutja az AC szakaszt, X minden egyes helyzetének megfelel Y-nak egy és csakis egy helyzete. Ha az AX és AY távolság közül az egyik adott, akkor a másikat az AX : AY = AB : AC = 1:2 arányból kiszámíthatjuk. Az egész AC szakaszon nincs "több" pont mint az AB szakaszon.

Bolzano azonban visszariadt ettől a gondolattól: "... kizárólag ebből a tényből -- úgy látjuk -- még nem lehet arra következtetni, hogy e két végtelen halmaznak, elemeik számosságára vonatkozólag, egyenlőnek kell lennie egymással".
Az a tétel ugyanis, hogy az egésznek szükségszerűen nagyobbnak kell lennie, azaz több elemmel kell rendelkeznie bármelyik részénél, amit évezredek óta igaznak tartottak nagyon erősen hatott Bolzanora is. (Véges halmazokra igaz a tétel, mint azt már említettük.)
Ha azonban a végtelen halmazok jól felhasználható összehasonlításához akarunk eljutni le kell mondani erről a tételről. Egy végtelen halmaz ismertetőjele éppen az, hogy a Bolzano-féle bijektív leképezés értelmében ugyanolyan sok elemmel rendelkezhet, mint egy részhalmaza. Ezt az elképzelést Cantor vitte végig. Ezzel sikerült megtalálnia az utat az aktuális végtelenhez is.

Felsorolásunkból is látszik -- amely korántsem teljes --, hogy a végtelen halmazok fogalmának elfogadása nem volt egységes. Ma már minden matematikával kapcsolaltos filozófiai irányzat elismeri, hogy ezek a tiszta matematikai fogalomalkotás eredményei.

5/ A végtelen halmazok gyakran fellépnek. Érdekes kérdésként vetődik fel -- a hallgatóink is gyakran megkérdezik -- hogy a véges halmazok mely tulajdonságai öröklődnek a végtelen halmazokra és melyek nem; hány aktuális végtelen létezik?

a/ Egy halmaznak egyértelműen meghatározottnak kell lenni. Ez végtelen halmazokra is érvényes. Ha például valamely szakasz pontjainak halmazáról van szó, akkor -- az egyértelműség szellemében -- meg kell adni, hogy mind a két vagy csak az egyik, esetleg egyik végpontját sem számítjuk a halmazhoz, (bár egy vagy két elem hozzáadása végtelen halmazok összehasonlítása szempontjából jelentéktelen).

b/ Véges halmazok körében elmondtuk, hogy ha egy halmaz egy másikra kölcsönösen egyértelműen leképezhető, akkor ezeket egyenlő számosságúaknak vagy ekvivalenseknek nevezzük. Véges halmazok számossága ekvivalenciareláció. A véges halmazok R rendszerében íly módon nyert osztályozás vezetett bennünket a természetes számokhoz mint R osztályaihoz. A természetes szám tehát nem más, mint egymással ekvivalens halmazok egy osztálya. Ezzel szemben, ha egy A halmaz bijektív módon leképezhető a B egy valódi részhalmazára, akkor A halmaz számosságát kisebbnek neveztük, mint B halmazét. Azt is mondtuk, hogy véges halmazok körében nem lényeges a bijektív leképezés módja. A végtelen halmazok körében más a helyzet. Mert véges $A := \{a,b,c,d,e\}$ halmazt a $B := \{1,2,3,4,5\}$ halmazra leképezhetjük úgy, hogy $\{(a;1),(b;2),\dots,(e;5)\}$, de úgy is, hogy $\{(b;1),(e;2),(d;3),(a;4),(c;5)\}$ Ha valamely bijektív leképezésnél mind a két halmaz egyszerre merül ki, akkor valamennyi bijektív leképezésnél ez történik. A végtelen $N := \{1,2,3,4,5,\dots\}$ és $P := \{1,3,5,7,\dots\}$ halmazok $n \longrightarrow 2n-1$ leképezésénél N minden elemének kölcsönösen egyértelműen megfelel P egy eleme. Mint véges halmazok esetében N és P halmazok esetében N és P halmazokat egyenlő számosságúaknak nevezzük. P-t most úgy képezzük le, hogy minden elemnek önmagát feleltetjük meg N-ben. Ekkor P halmazt N egy valódi részhalmazára, nevezetesen önmagára képeztük le. Az N és P egyenlő számossága itt nehezebben látható.

Persze ez nem csak számhalmazoknál van így.

Végtelen halmazok körében előfordulhat, hogy A halmaz B-re és egyúttal B valamelyik valódi részhalmazára is leképezhető. Véges halmazoknál ez nem lehetséges és éppen emiatt értelmezhetjük a számosságokra vonatkozó kisebb-nagyobb relációt. Végtelen halmazok összehasodnlítása nem ilyen egyszerű. Egy halmazhoz csak egy számosságot rendelünk hozzá. Nem támaszkodhatunk arra, hogy egy halmazt egyszer a másik halmazra, majd annak egy valódi részhalmazára képeztük le bijektív módon. Amennyiben sikerül az egyik halmazt a másikra csak egyetlen egyszer is bijektíven leképezni, akkor a két halmazt egyenlő számosságúnak tekintjük. Nem törődünk tehát azzal, hogy ezenkívül a halmaz a másik valódi részhalmazára leképezhető-e vagy sem. Ha tehát nem találunk olyan leképezést, amellyel az egyik végtelen halmazt a másikra leképezhetnénk, akkor nincs jogunk arra, hogy egyenlő számosságukat kétségbe vonjuk. Azt kell bizonyítanunk ehhez, hogy nem lehetséges az egyiknek a másikra való bijektív leképezése. Itt tehát lényegesen más a helyzet mint véges halmazoknál.

c/ Az elemek számának fogalma is megváltozik a végtelen halmazoknál; itt nem beszélünk elemek számáról, hanem csak egy halmaz számosságáról.
d/ Véges halmazok körében, amint azt már említettük egy halmaz sohasem lehet ekvivalens valódi részhalmazával. A végtelen halmazok körében a valódi rész ekvivalens lehet az egésszel. A végtelen halmazok körében nem érvényes tehát Euklides tanítása; a rész mindig kisebb az egésznél.
Az, hogy egy végtelen halmaz ekvivalens lehet egy valódi rész halmazával a végtelen halmazok jellemző tulajdonsága. Tehát a végesben megszokott tulajdonságok a fogalmaknak végtelenbe való kiterjesztésével nem mind mennek át a végtelenbe.
Az, hogy a végtelen halmaznak van vele ekvivalens valódi része objektív igazság. Ez az objektív igazság viszont nem az anyagi világban, hanem a matematikai fogalmak világában érvényes.
Ezt az objektív igazságot bizonyos definíciók megváltoztatásával nem lehet megszüntetni. Az a vélemény, hogy a végtelen halmazok körében nincs értelme a nagyság szerinti megkülönböztetésnek; a végtelen az végtelen, megszüntet és egybeolvaszt minden különbözőséget a priori vélemény.

e/ A végtelen halmazok számosságai az úgynevezett végtelen számosságok a természetes számok általánosításai és bizonyos mértékig kifejezik, hogy egy végtelen halmaznak hány eleme van. Minden számosságnál van nagyobb számosság, amely minden a halmazban szereplő számosságnál nagyobb. A sok aktuális végtelen halmaz összehasonlítható "nagyság" szempontjából. Ugyanis, ha adott két halmaz, akkor a következő esetek lehetségesek:

I. Egyik halmaz a másikra, bijektív módon leképezhető. Ekkor a két halmaz számossága egyenlő.
II. Az egyik halmaz bijekív módon leképezhető, a másik egy valódi részhalmazára, s ezenkívül a másik halmazra is. Ekkor az előbbi eset áll fenn, a két halmaz egyenlő számosságú.
III. Az egyik halmaz leképezhető kölcsönösen egyértelmű módon a másik egy valódi részhalmazára és a másik halmaz is az egyik egy valódi részhalmazára. Ekkor a két számosság ugyancsak egyenló (Cantor-Bernstein tétel).
IV. Az egyik halmaz leképezhető bijektív módon, a másik halmaz egy való-

di részhalmazára, de nem képezhető le kölcsönösen egyértelmű módon a másik halmazra. Ekkor az egyik halmaz kisebb számosságú mint a másik.

Két tetszőleges véges vagy végtelen halmaz "nagyság" szempontjából tehát mindig összehasonlítható.

A számosságok között definiálható az összeadás, a szorzás, a hatványozás; ezekre a természetes számok közötti hasonló műveletek számos tulajdonsága érvényben marad.

A felvetett kérdés megválaszolása csak részleges. Még sok olyan tulajdonság van, amelyek véges halmazok körében érvényesek a végtelen halmazok körében nem.

6/ A végtelen halmazok absztrakt elmélete, a végtelen halmazok tételei igazságot fejeznek-e ki?

A természettudományokban az igazság és az alkalmazhatóság egybeesik.

A halmazelmélet igazságkritériuma a logikai igazságfogalommal van szoros kapcsolatban; a halmazelmélet tételei nem kerülhetnek összeütközésbe a logika tételeivel, törvényeivel. A halmazelmélet igazságkritériumának a logikai ellentmondástalanságot tekintjük. Egy halmazelméleti rendszernek, olyannak kell lennie, hogy ne lehessen benne egy tételt és annak tagadását is bizonyítani. A logikából tudjuk, hogy az ellentmondástalanság elve helyes gondolkodási törvény abban az értelemben, hogy eszerint gondolkodva és következtetve az anyagi jelenségek széles körében gondolkodásunk összhangban van a tapasztalattal, a tényekkel. Ez nem ellenkezik a dialektikus materialista világszemlélettel -- amely arra tanít, hogy a szüntelen változások közepette egy viszonylagos állandóság, stabilitás is mutatkozik --, sőt annak része.

7/ A végtelen halmazok elméletének stabilitása -- rövid időre -- akkor ingott meg, amikor ellentmondásokat, antinómiákat fedeztek fel benne. Az összes dolgok és összes számosságok, az összes rendszeámok, a Russell, a Richard féle antinómiákat tanórákon elemezzük. Az antinómiákhoz, azok kiküszöböléséhez kapcsolódó filozófiai nézeteket (logicista, intuicionista, formalista, dialektikus materializmus) megismertetjük hallgatóinkkal. Elemezzük az axiomatizálás kérdéseit is.

Az antinómiákkal, az axiomatizálással kapcsolatos filozófiai vonatkozások jelentősek és érdekesek, de mivel különböző irodalmakban megtalálhatóak, ezért ezek tárgyalására itt nem térünk ki. (Eredeti összeállításunk ezeket is tartalmazza.)

A világ törvényszerűségei megismerhetőek, de ez a megismerés egy folyamat az emberiség történelmi fejlődése során. Példázza ezt a halmazelmélet fejlődése is. Az axiomatizálás napjainkig stabilizálta a halmazelméletet. Ez a stabilitás azonban viszonylagos. A későbbi fejlődés felvethet problémákat, amelyek alapján az eddigi eredmények (axiómarendszerek) kiegészítésre szorulnak, később még további korrekciók szükségessége merülhet fel. Ez a folyamat egészében véve fejlődés, hiszen a felmerült kérdésekre adott válaszok így egyre pontosabbakká válnak.

TARTALOMJEGYZÉK